



دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهر  
فصلنامه‌ی علمی-پژوهشی فضای جغرافیایی

سال هفدهم، شماره‌ی ۵۹  
پاییز ۱۳۹۶، صفحات ۲۷۰-۲۵۵

\* هیوا علمیزاده<sup>۱</sup>  
امید ماه‌پیکر<sup>۲</sup>

## بررسی نظریه فرکتال در رودخانه زرينه‌رود با استفاده از روش شمارش جعبه‌ای

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۲/۰۶

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۵/۰۶

### چکیده

هندسه فرکتال کاربردهای بسیاری در قلمرو علوم در دهه‌های اخیر پیدا کرده است. استفاده از مدل‌های فرکتالی در بررسی پدیده‌های ژئومورفولوژیکی طی سال‌های اخیر گسترش یافته است. یکی از پرکاربردترین روش‌ها در مطالعه این پدیده‌ها، بعد فرکتالی است. در این مطالعه، تجزیه و تحلیل فرکتال برای حوضه رودخانه زرينه‌رود واقع در شمال‌غرب ایران با استفاده از روش شمارش جعبه‌ای انجام گرفت. برای دستیابی به این هدف، مطابق روش رودریگز و رینالدو، با استفاده از تصاویر ماهواره‌ای و نقشه‌های توپوگرافی، تعداد سلول‌های پوشش‌دهنده تمامی طول رودخانه زرينه‌رود به همراه انشعابات فرعی آن در هفت مقیاس مختلف (۲۵، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۴۰۰، ۸۰۰ و ۱۶۰۰ متر) محاسبه و شبکه‌های رودخانه‌ای به کمک نرم افزار Arc GIS استخراج گردید. بعد فرکتالی محاسبه شده (۱/۰۴) به مقدار اقلیدسی نزدیک است. این بدان معنی است که بعد فرکتالی مشخصه الگوی پیچ‌وخم این رودخانه را نشان می‌دهد. در نتیجه، بعد فرکتالی پایین رودخانه زرينه‌رود می‌تواند وجود فرآیندهای کنترلی تکتونیک روی تکامل الگوی زهکشی مورد مطالعه را نشان دهد. بنابر این دلایل می‌توان نتیجه گرفت رودخانه مذکور از نوع

E-mail: elmizadeh@kmsu.ac.ir

\* ۱- گروه ژئومورفولوژی، گروه محیط‌زیست، دانشگاه علوم و فنون دریایی خرمشهر (نویسنده مسئول).

۲- کارشناس ارشد فیزیک دریا، دانشگاه علوم و فنون دریایی خرمشهر.

خودالحاقی هست و شکل رودخانه به‌طور یکسان در تمام جهات منتشر نشده است و در سیمای کنونی شبکه زهکشی، شاخه‌های جانبی مراتب کم‌تر، مستقیماً به شاخه اصلی با بالاترین مرتبه ریخته می‌شوند.

**کلید واژه‌ها:** زرینه‌رود، بعد فرکتالی، شمارش جعبه‌ای، ژئومورفولوژی رودخانه، خود الحاقی.

#### مقدمه

درون ناحیه آشوب، وضعیت‌هایی با حالت نوسانی ثابت قابل تشخیص هستند و این نواحی پایدار روی هر مقیاس ممکن ظاهر می‌شوند. این نواحی که به‌صورت تکراری ظاهر می‌شوند، فرکتال نام دارند. فرکتال‌ها به‌عنوان اشیا هندسی تعریف می‌شوند که تحت تغییر مقیاس ثابت می‌مانند. یعنی شکل آن‌ها طی بزرگ‌نمایی یا کوچک‌نمایی حفظ می‌شود. اجزای یک شی تمایل دارد که در بیش‌ترین فضای ممکن جاسازی شود، مثلاً توزیع نقاط روی یک خط (در یک بعد) یا مجموعه‌ای از سطوح (دو بعدی) که در فضای سه‌بعدی جاسازی می‌شوند (باس<sup>۳</sup>، ۲۰۰۲: ۳۱۱). هندسه فرکتال شاخه‌ای جدید از علم هندسه است که پدیده‌های طبیعی و اجسام پیچیده و نامنظم را مطالعه می‌کند و برخلاف هندسه اقلیدسی که اجسام و پدیده‌های طبیعی را منظم و دارای بعد صحیح در نظر می‌گیرد، بر مبنای بعد اعشاری می‌باشد. این شاخه از هندسه که توانایی بررسی تغییرپذیری متغیرهای پیچیده را دارد و به‌عنوان وسیله‌ای برای مدل کردن پدیده‌های پیچیده استفاده می‌شود، به سرعت در علوم مختلف به‌خصوص علوم زمین گسترش یافته است.

در کاربرد محاوره‌ای، یک فرکتال، یک شکل هندسی چندپاره یا ناهموار است که می‌تواند به بخش‌هایی تقسیم شود که هر کدام از آن‌ها (حداقل به‌طور تقریبی) یک تصویر کاهش‌یافته از لحاظ اندازه، از کل شکل می‌باشد. صرف‌نظر از این‌که با چه دقتی یک شی فرکتالی را بررسی کنیم، این کار دارای اشکالاتی خواهد بود و درجه نوسان آن بدون تغییر باقی خواهد ماند. اشیا فرکتالی در تمام مقیاس‌ها متغیر هستند و مقیاس افقی خاصی را به‌دست نمی‌دهند. پارامتر مهمی که مشخصه اصلی فرکتالی بودن یک پدیده می‌باشد، بعد فرکتالی است<sup>۴</sup>. بُعد فرکتال ارتباط تنگاتنگی با سایر ویژگی‌های فیزیکی و هندسی حوضه آبریز دارد و می‌توان آن را نمایه‌ای قوی و مهم در انعکاس خصوصیات فیزیکی حاکم بر حوضه آبریز و سری‌های زمانی جریان رودخانه دانست. برای تعیین این پارامتر روش‌های مختلفی وجود دارد؛ یکی از پرکاربردترین روش‌ها، روش شمارش جعبه‌ای است که به‌عنوان ابزاری در زمینه ریاضیات، جهت مطالعه ژئومورفولوژی رودخانه‌ها کاربرد دارد. سیستم‌های ژئومورفیک، سیستم‌های پیچیده و غیرخطی هستند

#### 3- Baas

۴- بعد هر فرکتال را می‌توان این‌گونه تعریف کرد: نسبت لگاریتم تعداد اشکال خود مشابه به لگاریتم عامل بزرگ‌نمایی. مثلاً می‌دانیم که مربع یک شی ریاضی دو بعدی است. این بعد دوم را می‌توان این‌گونه به‌دست آورد که از تقسیم هر ضلع مربع به  $N$  قسمت مساوی و وصل کردن نقاط روبه‌رو به هم،  $N^2$  مربع به‌دست می‌آید که اندازه هر کدام  $1/N^2$  برابر مساحت مربع اولی است. این شکل، یک ساختار فرکتالی دارد که هر ضلع مربع‌های کوچک با ضریب  $N$  به‌اندازه ضلع مربع اصلی تبدیل می‌شود.

که از متغیرهای متعدد و برهم‌کنش‌های متفاوت و همچنین روابط غیرخطی تشکیل شده‌اند، در این رابطه بسیاری از پدیده‌های طبیعی مانند الگوهای زهکشی، شبکه‌های رودخانه‌ای یا خطوط ساحلی حالت فرکتالی دارند و شکل‌گیری و تحول آن‌ها را می‌توان با روابط ریاضی تبیین کرد<sup>۶</sup> (باس، ۲۰۰۲: ۳۱۳). ژئومورفولوژی زمینه گسترده‌ای برای کاربرد مفاهیم آشوب و فرکتال است؛ به طوری که استفاده از مدل‌های فرکتالی در بررسی پدیده‌های ژئومورفولوژیکی طی سال‌های اخیر گسترش یافته است. جنبه‌های فرکتالی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی پیچیده در چشم‌اندازها و طبیعت مطالعه شده آن‌ها قابل مشاهده است؛ به‌عنوان نمونه، تقریباً همه چشم‌اندازها، دامنه‌ای از برهم‌کنش دینامیکی غیرخطی بین عناصر سیستم را نمایش می‌دهند. در ژئومورفولوژی، روش هندسه فرکتال برای اولین بار در مطالعه طول خطوط سواحل و شکل الگوهای زهکشی و گسل‌ها استفاده شد (نیکورا<sup>۷</sup>، ۱۹۹۱: ۱۳۲۹). در حال حاضر پارامترهای فرکتالی که در ژئومورفولوژی استفاده می‌شوند، شامل موارد زیر می‌باشد:

۱- توصیف فضایی لندفرم‌ها با اندازه‌های مختلف (از کوچک مقیاس گرفته تا بزرگ مقیاس)  
 ۲- توصیف لندفرم‌ها با شکل‌های پیچیده (مثل صخره‌های مرجانی، شبکه‌های رودخانه‌ای، کوه‌ها، غارها و تپه‌های ماسه‌ای)

۳- مطالعه فرآیندها و توزیع سطحی آن‌ها (مثل فرسایش، هوازگی شیمیایی و مکانیکی)  
 هندسه فرکتال روشی را برای کمی‌سازی جهت توصیف لندفرم‌ها فراهم می‌آورد که تقریب‌های جدیدی را برای اندازه‌گیری‌ها و تحلیل‌ها به دست می‌دهد و اجازه می‌دهد کلیات اشیا طبیعی در مقیاس‌های مختلف مقایسه و مقادیر تحلیلی این مقیاس‌ها مطالعه شوند (بورو<sup>۸</sup>، ۱۹۸۱: ۲۴۱). فرکتال‌ها یا خودمشابه<sup>۹</sup> و یا خودالحاقی<sup>۹</sup> هستند. در مورد خود مشابهی، شکل جزء شباهت محسوسی به شکل کل دارد و این جزء در همه جهات به نسبت ثابتی رشد می‌کند و کل را به وجود می‌آورد. اما در خودالحاقی، شکل جزء در همه جهات به نسبت ثابتی رشد نمی‌کند. مثلاً در مورد رودخانه‌ها و حوضه‌های آبریز بعد فرکتالی طولی، متفاوت از بعد فرکتالی عرضی است. به خود مشابهی، همسان گرد<sup>۱۰</sup> و به خودالحاقی، ناهمسان گرد<sup>۱۱</sup> می‌گویند (ساپوژنکف و فوفولا<sup>۱۲</sup>، ۱۹۹۹: ۸۴۵). وقتی شکل‌های فرکتالی شبکه‌های مورفومتریک پیچیده توصیف می‌شوند، درک و آگاهی از مفاهیم اساسی فرکتال اهمیت می‌یابد. این کار بر اساس مطالعات صورت گرفته به‌منظور تعریف و ارزیابی بخش‌های اصلی هندسه فرکتال که برای شکل‌های فرکتالی شبکه‌های ژئومورفیک پیچیده کاربرد دارند، صورت می‌پذیرد.

۵- فراکتال یا رفتار فراکتالی در واقع رفتاری است که در طبیعت و هر چیزی که متمایل به داشتن یک حالت تعادلی است، وجود دارد (کرم، ۱۳۸۹).

6- Nikora

7- Burrough

8- self-similarity

9- self-affinity

10- isotropy

11- anisotropy

12- Sapozhnikov and Foufoula

هدف از محاسبه بعد فرکتالی شناخت و پیش‌بینی تغییرات ژئومورفولوژیکی رودخانه طی سالیان متمادی است. از آنجا که این تغییرات متأثر از پیچ‌وخم رود، شیب بستر، سرعت جریان و تغییرات دبی رود در فصول مختلف است، یافتن الگوی فرکتالی رودخانه می‌تواند کمک شایانی به بررسی و کنترل این عوامل نماید. از سوی دیگر، طول یک رودخانه و تعداد شاخه‌های آن و گسترش این شاخه‌ها در سطح عامل مهمی است که در تغییرات میزان آب‌های سطحی و تخلیه این آب‌ها از حوضه آبخیز رودخانه بسیار اثربخش است. لذا طول رودخانه و گستردگی شاخه‌های جانبی آن، به‌عنوان عاملی مهم در تعیین بعد فرکتالی می‌تواند منجر به توصیف ژئومورفولوژی رودخانه گردد.

ابعاد فرکتال‌ها که در ژئومورفولوژی استفاده می‌شوند، ابتدا به‌عنوان پارامترهای توصیفی از الگوها و توپوگرافی چشم‌اندازها معنی‌دار می‌شوند؛ یعنی به‌عنوان اندازه‌گیری ناهمواری سطوح. روش‌های اندازه‌گیری فرکتال‌ها از چشم‌اندازها در مطالعات ژو<sup>۱۳</sup> و همکاران (۱۹۹۳) بررسی شده است. سطوح چشم‌اندازها تا بی‌نهایت شبیه هم نیستند؛ مشاهده شده که ابعاد فرکتال‌ها برخی از جنبه‌های سطوح صخره‌ای را تحت بازه‌ی محدودی از مقادیر که دیگر اندازه‌گیری‌های مورفومتریک انجام نداده است، به تسخیر درآورده است (کلینکنبرگ<sup>۱۴</sup>، ۱۹۹۲: ۵). سپس آندرل<sup>۱۵</sup> (۱۹۹۶) با بررسی بعد فرکتالی خطوط سواحل غرب بریتانیا نشان داد مقایسه ابعاد فرکتال‌ها که از روش‌های مختلف به‌دست آمده می‌تواند به‌صورت مسئله درآورده شود و خطاهایی که تعیین آن‌ها مشکل است، تخمین زده شوند.

تحلیل فرکتالی در سالیان اخیر توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود معطوف کرده است، به‌طوری‌که مطالعات گسترده‌ای در زمینه مشخصه‌های تغییرناپذیری مقیاس و خود مشابهی در فضای اجسام صورت گرفته است. در ژئومورفولوژی رودخانه‌ای، گستره‌ی کاملی حول تحلیل، تفسیر و مدل‌سازی شبکه‌های رودخانه‌ای در عباراتی از فرکتال‌ها در حال توسعه است. در این خصوص رینالدو<sup>۱۶</sup> و همکاران (۱۹۹۳) و کلاپس<sup>۱۷</sup> و همکاران، (۱۹۹۶) بین مشخصه‌های ثابت شبکه‌های رودخانه‌ای مثل قانون هورتون<sup>۱۸</sup> (۱۹۴۵) شامل شاخه‌ها و طول رودخانه‌ها، و قانون توان طولی و سطح بستر هاک<sup>۱۹</sup> (۱۹۵۷)، با الگوی فرکتالی رودخانه‌ها ارتباط برقرار کردند. رودریگز و رینالدو<sup>۲۰</sup> (۱۹۹۷) یک مدل عددی به دست آوردند که گسترش شبکه‌های رودخانه‌ای را روی قسمت‌های سلولی شبیه‌سازی می‌کرد و بر طبق چند رابطه انتقال رسوب هیدرولیکی پایه‌گذاری شده بود. در این الگوریتم فقط هنگامی فرسایش اتفاق می‌افتد که اختلاف فشار از یک مقدار بحرانی تجاوز کند. این مقدار آستانه مکانسیم بازخوردی تولید می‌کند که در یک شبکه رودخانه‌ای فرکتالی انرژی اتلافی کل در یک مقدار حداقل واقع شود و متناسب با این مشخصه، قانون توان به‌دست آمده در شبکه‌های رودخانه‌ای طبیعی نشان داده می‌شود. آن‌ها همچنین به بررسی دقیق کاربردهای

13- Xu

14- Klinkenberg

15- Andrle

16- Rinaldo

17- Claps

18- Horton

19- Hack

20- Rodriguez and Rinaldo

فرکتال در حوضه رودخانه‌ها پرداختند ولی بیش‌تر از کاربرد این روش‌ها در مورد کانال‌های رودخانه‌ای، به پیشبرد طرح هورتون در مورد الگوهای زهکشی توجه نشان دادند. پکهام<sup>۲۱</sup> (۱۹۹۸) از درختان فرکتالی برای تحلیل دو رودخانه در ایالات متحده استفاده کرد. وی ماتریس نسبت انشعاب را برای رودخانه‌های کنتاکی<sup>۲۲</sup> و پودر<sup>۲۳</sup> تعیین و سپس بعد فرکتالی را محاسبه نمود. آنجلس<sup>۲۴</sup> و همکاران (۲۰۰۴) بعد فرکتالی کانال‌های جزر و مدی خور باهیا بلانکا در آرژانتین را محاسبه کردند. در این مطالعه، با استفاده از روش‌های شمارش جعبه‌ای و همبستگی، ابعاد فرکتالی ۹ کانال به‌دست آمد و خواص ژئومورفولوژیکی آن‌ها با هم مقایسه گردید. گوپتا و مسا<sup>۲۵</sup> (۲۰۱۴) قوانین هورتون را برای متغیرهای هیدرولیکی-هندسی به‌کار گرفتند و مقیاس بندی این قوانین را در مورد خود مشابهی شبکه‌های رودخانه‌ای توکوناگا شرح دادند. کوساک<sup>۲۶</sup> (۲۰۱۴) روش فرکتالی را در مطالعه شبکه‌های ژئومورفیک پیچیده بررسی کرد. در این پژوهش دو مورد تعریف و مقایسه شده است: ۱- عبارات اصلی در هندسه فرکتال یعنی بعد فرکتالی، خود مشابه، خود الحاقی<sup>۲۷</sup>، فرکتال‌های تصادفی، مقیاس مرتبه‌ای، خود مشابهی فرکتالی و محدودیت‌های فیزیکی یک سیستم؛ ۲- روش‌های موجود جهت تعیین بعد فرکتالی شبکه‌های ژئومورفیک پیچیده. دونادیو<sup>۲۸</sup> و همکاران (۲۰۱۴) بعد فرکتالی الگوی هیدروگرافیکی سه رودخانه بزرگ را مقایسه کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که بعد فرکتالی محدوده‌ای بین ۱/۰۸ تا ۱/۵ دارد. همچنین مطابق با وضعیت زمین‌شناختی و شاخص‌های ژئومورفیک هر حوضه، درجه فرکتالی پایین، غلبه تکنونیک خواه فعال یا غیرفعال را بر سایر عوامل تأثیرگذار نشان می‌دهد، در حالی که درجه‌های فرکتالی بالاتر، فرآیند فرسایشی قوی‌تر در آن چشم‌انداز را نشان می‌دهد. فرناندز و سانچز<sup>۲۹</sup> (۲۰۱۵) از ساختارهای فرکتالی برای مطالعه یک روش جدید جهت محاسبه بعد فرکتالی از هر دو دیدگاه پیوستگی و گسستگی بهره بردند. آن‌ها نشان دادند که امکان تعمیم این بعد در زمینه فضاهاى اقلیدسی با ساختار طبیعی فرکتالی آن‌ها وجود دارد. برای انجام این کار آن‌ها تعاریفی از بعد فرکتالی برای یک ساختار فرکتالی ارائه دادند و روابط و خواص ریاضی آن‌ها را مطالعه کردند.

مطالعات صورت گرفته در داخل کشور در زمینه نظریه آشوب و هندسه فرکتال بسیار اندک می‌باشد که بخشی از آن به دلیل نبود داده‌های دقیق در مورد پدیده‌ها، و بخش دیگر به دلیل نبود متخصصان در این زمینه می‌باشد. در این میان رامشت (۱۳۸۲) در مطالعه‌ای که نتیجه‌ی بررسی‌های نظری طرح پژوهشی آثار یخچالی در دامنه‌های غربی زفره و مقایسه آن با دامنه‌های نثار شرقی این منطقه است، به تبیین مبانی نظریه آشوب و تطبیق آن در ژئومورفولوژی می‌پردازد و حوضه‌ی کاربردی آن، را در این بخش از علوم جغرافیایی دنبال کرده است و از این‌رو برای دستیابی به

21- Peckham

22- Kentucky

23- Powder

24- Angeles

25- Gupta and Mesa

26- Kusak

27- Self-affine

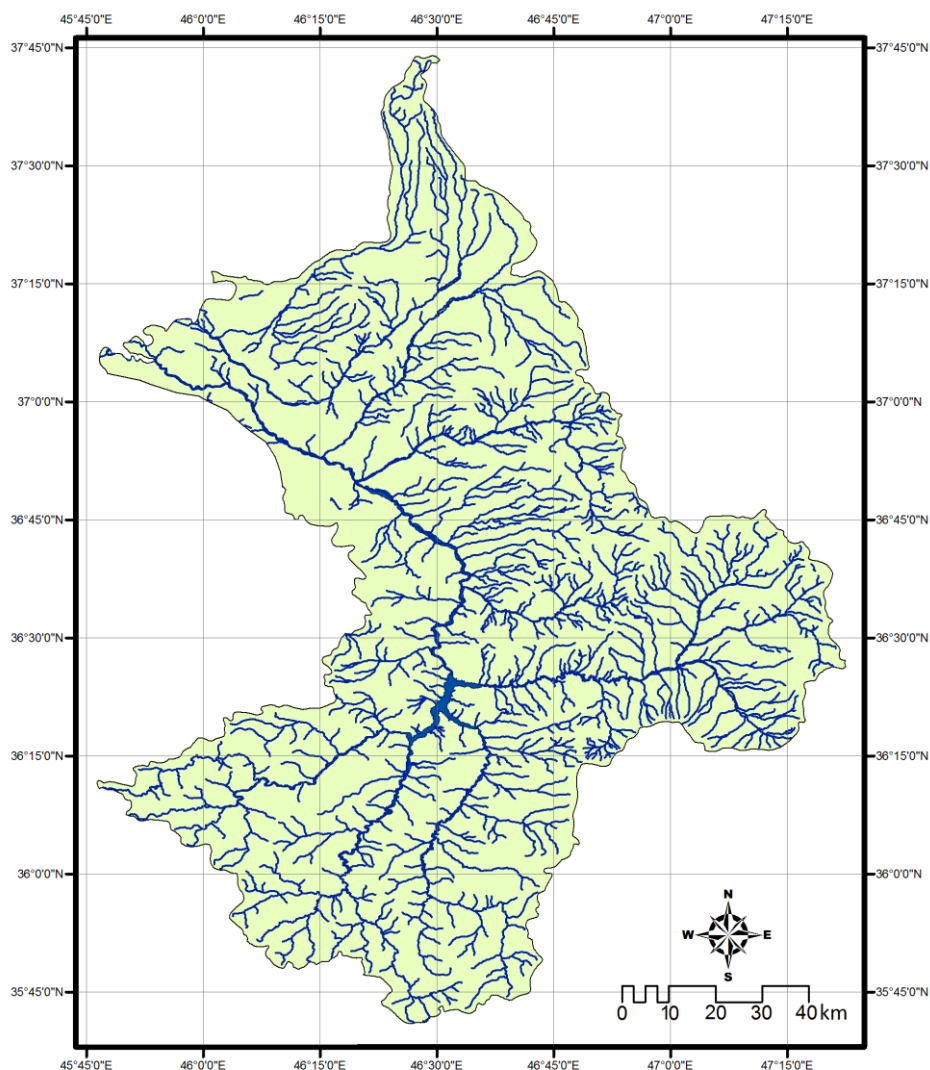
28- Donadio

29- Fernández and Sánchez

چنین منظوری ضمن تشریح پاره‌ای از مفاهیم، با ارائه مدل ساده‌ای از عملکرد سیستم‌های آبی منطقه در پاراگلیشیال نمونه‌های ژئومورفیک موجود در منطقه‌ی هنجن و نظنز را که شواهد بارز آشوب در چشم‌انداز عمومی منطقه به‌شمار می‌آیند، معرفی و با مواردی که این پدیده در آن‌ها قابل مشاهده نیست مقایسه نموده است. کرم (۱۳۸۸) به بررسی نظریه آشوب، فرکتال و سیستم‌های غیرخطی در ژئومورفولوژی پرداخت و بیان کرد که رفتار آشوبناک در اغلب سیستم‌های دینامیکی پیچیده‌ی طبیعی و ژئومورفیک از جمله جریان‌های سطحی، حرکات توده‌ای، سیستم خاک و غیره دیده می‌شود و دیدگاه‌های جدید در ژئومورفولوژی تلاش می‌کنند رفتار پیچیده آشوبناک در سیستم‌های مذکور را از طریق نظریه آشوب و مفاهیم مرتبط با آن تحلیل و تبیین کنند. حسن‌زاده و همکاران (۱۳۹۱) به بررسی ماهیت آشوبناکی نوسانات روزانه تراز آب دریاچه ارومیه پرداختند. در این مطالعه، نوسانات روزانه تراز آب دریاچه ارومیه در طول دوره آماری ۴۴ ساله با استفاده از مفاهیم آشوب بررسی گردید و پس از محاسبه زمان تاخیر و بازسازی فضای حالت، بعد محاط با استفاده از توابع خودهمبستگی و الگوریتم نزدیک‌ترین همسایگی کاذب تعیین شده و سپس شیب نمودار بعد همبستگی محاسبه گردیده است. قاهری و همکاران (۱۳۹۱) جریان رودخانه را با استفاده از نظریه آشوب مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق خصوصیات جریان روزانه رودخانه اهرچای در طی ۱۹ سال با استفاده از مفاهیم نظریه آشوب بررسی و پیش‌بینی شده است. نتایج حاصل از محاسبات آن‌ها بیانگر بعد فرکتالی ۴ با زمان تاخیر ۶۵ روز و بعد محاط ۱۳ است که برای بازسازی فضای حالت دینامیکی جریان رودخانه می‌تواند استفاده شود. همچنین علمی‌زاده و شایان (۱۳۹۳) با تبیین نظریه آشوب در رودکل، نشان دادند که تغییر مسیرهای قبلی این رود حالتی از سیستم جریانی است و این تغییرات در جهت دستیابی به پایداری است، اگرچه هنوز این امر رخ نداده است. این مقاله با هدف تعیین بعد فرکتال با استفاده از تحلیل هندسی فرکتال در شبکه آبراه‌های زرينه‌رود با روش شمارش جعبه‌ای می‌پردازد.

#### منطقه مورد مطالعه

رودخانه زرينه رود با طول ۳۰۲ کیلومتر یکی از طویل‌ترین و پرآب‌ترین رودهای شمال‌غرب کشور می‌باشد که از کوه‌های چهل چشمه در سقز سرچشمه می‌گیرد و پس از گذر از شهرستان‌های بوکان، تکاب، شاهین‌دژ و میاندوآب، موازی با سیمینه‌رود به سوی شمال جریان یافته و از میان دره‌های ژرف و پرپیچ‌وخم گذشته، در جنوب دریاچه ارومیه ضمن تشکیل یک دلتای وسیع به عرض حدود ۱۰ کیلومتر به این دریاچه می‌ریزد (شکل ۱). در طول این مسیر چندین رودخانه فصلی از جمله خورخوره، ساروق، هولاسو، هاچه سو، محمودآباد، آجرلو و لیلان چای نیز به زرينه‌رود ملحق می‌شوند. حوضه رودخانه زرينه‌رود از نظر تقسیمات کشوری در محدوده استان‌های آذربایجان غربی، آذربایجان شرقی، کردستان و زنجان قرار گرفته، ولی بیش‌ترین سهم این حوضه متعلق به استان آذربایجان غربی می‌باشد. متوسط آبدی ماهانه این رودخانه ۱۳۹/۵ میلیون متر مکعب برآورد می‌گردد. متوسط آبدی سالانه ۱۸۱۳ میلیون مترمکعب و رژیم آن از نوع سیلابی می‌باشد. این حوضه دارای اقلیمی نیمه خشک و از نوع سرد کوهستانی و بارش متوسط سالانه ۳۸۰ میلی‌متر می‌باشد.



شکل ۱: نقشه محدوده مورد مطالعه.

### مواد و روش‌ها

برای محاسبات از تصاویر ماهواره‌ای و نقشه‌های توپوگرافی با مقیاس ۱:۵۰۰۰۰ استفاده شده است. تعداد سلول‌های پوشش‌دهنده رودخانه زرينه‌رود در هفت مقیاس مختلف (۲۵، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۴۰۰، ۸۰۰ و ۱۶۰۰ متر) محاسبه و شبکه‌های رودخانه‌ای به کمک نرم‌افزار ArcGIS استخراج گردید است، سپس داده‌های ورودی برای محاسبه عدد فرکتالی دوبعدی به کمک تابع همبستگی وارد نرم‌افزار گردید. با در نظر گرفتن این نکته که در تحلیل بعد فرکتالی، با کاهش مقیاس جزئیات دقیق‌تری حاصل می‌شود، برای خطوط ساحلی، رودخانه‌ها یا هر پدیده دوبعدی، معادله  $L=NS$  برای تقریب کلی طول یعنی  $L$  استفاده می‌شود، درحالی‌که  $N$  تعداد سلول‌ها با طول ضلع  $S$  است که برای اندازه‌گیری آن پدیده مورد نیاز است. به این ترتیب طول ظاهری یک خط، مانند رودخانه به صورت غیرخطی افزایش می‌یابد؛ درحالی‌که مقیاس مطابق با الگوی اندازه‌گیری شده کاهش می‌یابد؛ یعنی همان‌طور که  $N$  افزایش

می‌یابد،  $S$  مطابق با قانون تناسب کاهش می‌یابد (آنجلس و همکاران، ۲۰۰۴: ۲۶۷). توانی که رشد غیرخطی در  $N$  را نشان می‌دهد، بعد فرکتالی منحنی است (رابطه ۱) یعنی:

$$N(S) = \frac{C}{S^D} \quad \text{رابطه (۱)}$$

که در اینجا  $C$  ثابت تناسب است که بین  $N$  و  $S$  ذکر شده در بالا مجاز است. اگر بعد فرکتالی با بعد سیستم توپولوژیک یکسان باشد، آن برابر با یک خواهد بود (یک خط مستقیم)، در مواردی که با یک سطح معادل است ۲ خواهد بود. در هر حال وقتی که  $D$  یک مقدار غیر اقلیدسی است، با مقادیر کوچک متناسب است. در نتیجه یک منحنی یا خط نامنظم یک بعد فرکتالی بالاتر از یک و کوچک‌تر از ۲ دارد. روش شمارش جعبه‌ای با موفقیت در مطالعات در مورد رودخانه‌ها، خطوط ساحلی و دیگر پدیده‌های خطی استفاده شده است (تورکت<sup>۳۰</sup>، ۱۹۹۲: ۱۴۴). تخمین مقادیر  $D$  برای رودخانه‌ها با پیروی از مراحل زیر نتیجه می‌شود:

الف- مجموعه‌ای از سلول‌ها متشکل از مربعاتی با طول ضلع  $S$  ایجاد می‌شود. هر سلول به‌طور مستقل بر روی قسمتی از رودخانه اضافه می‌شود و تعداد سلول‌های  $N$  با اندازه  $S$  که شامل یک جز خطی معین از رودخانه است، ثبت می‌شود. وقتی که اندازه جعبه‌ها کاهش یابد،  $S$  نیز کاهش می‌یابد. در نتیجه، همان‌طور که  $S$  به صفر متمایل می‌شود، معادله  $L=NS$  یک تقریب دقیق‌تری از طول واقعی منحنی را ایجاد می‌کند. در ادامه مقدار  $D$  یا بعد شمارش جعبه‌ای به لحاظ نظری توسط رابطه (۲) محاسبه می‌شود (رودریگز و رینالدو، ۱۹۹۷: ۲۶۸):

$$D = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\log N(S)}{\log \left(\frac{1}{S}\right)} \quad \text{رابطه (۲)}$$

در اینجا همان‌طور که  $S$  کاهش می‌یابد، معادله تخمین بهتری از بعد فرکتالی ارائه می‌دهد. این بسیار مهم است تا کوچک‌ترین جعبه ممکن را به لحاظ اندازه برای نزدیک شده به حد بالا تعریف کنیم؛

ب- یک نمودار از  $\log N(S)$  به روی  $\log(1/S)$  برای رودخانه ایجاد می‌شود. سپس، رابطه بین  $N(S)$  و  $1/S$  توسط رگرسیون خطی تعریف می‌شود و شیب خط مستقیم به‌دست آمده، بعد فرکتالی  $D$  است.

در حالی دیگر برای به‌دست آوردن بعد فرکتالی مطابق روش تورکت (۲۰۰۷) از نسبت مقیاس‌ها و تعداد سلول‌ها برای محاسبه بعد فرکتالی استفاده می‌شود. تفاوت این حالت با حالت قبل در اینجاست که مقداری که در این روش حاصل می‌شود همواره بین ۱ و ۲ است؛ در صورتی که در حالت قبلی بعد به‌دست آمده در محدوده‌ی خاصی از مقیاس‌ها بین ۱ و ۲ بود. رابطه تورکت به‌صورت رابطه (۳) است که در آن بعد فرکتالی از میانگین‌گیری روی حالت‌های مختلف محاسبه می‌شود:

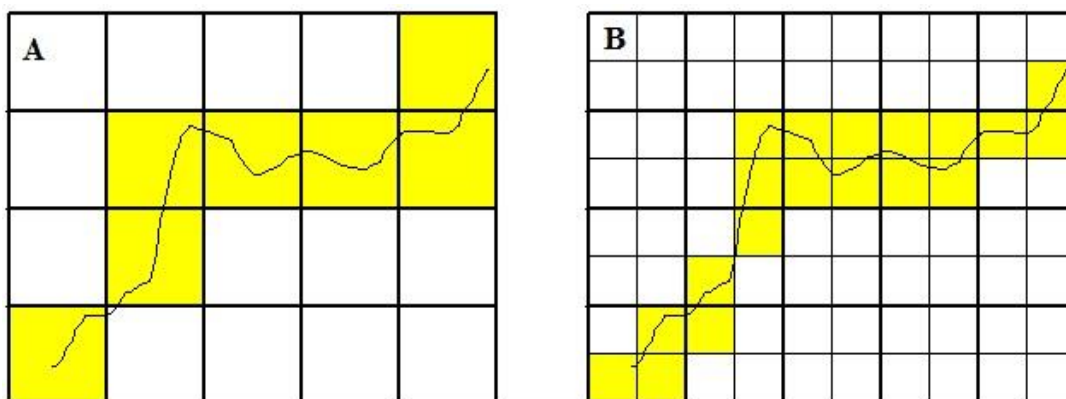


$$D = \frac{\log\left(\frac{N_2}{N_1}\right)}{\log\left(\frac{s_1}{s_2}\right)} \quad \text{رابطه (۳)}$$

در حالت سوم برای محاسبه بعد فرکتالی از روش محاسبه بعد ظرفیت<sup>۳۱</sup> استفاده می‌شود. رابطه بعد ظرفیت به شکل رابطه (۴) است:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(n)} \quad \text{رابطه (۴)}$$

که در آن  $n =$  تعداد سلول‌های پوشش‌دهنده شبکه در حالت قائم است. برای مثال در (شکل ۳)، با فرض این که طول ضلع هر سلول در حالت A برابر واحد است،  $S=1$ ،  $N=7$  و  $n=5$  است که این مقادیر در حالت B به  $S=0.5$ ،  $N=19$  و  $n=10$  تبدیل می‌شوند.



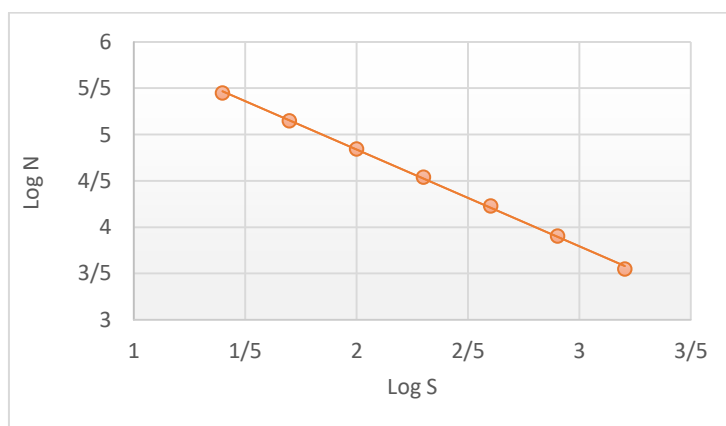
شکل ۳: مثال ساده‌ای جهت درک پارامترهای تعریف شده

### یافته‌ها و بحث

مطابق روش رودریگز و رینالدو، تعداد سلول‌های پوشش‌دهنده رودخانه زیرنه رود در هفت مقیاس مختلف محاسبه گردید (جدول ۱) و سپس نمودار log-log تعداد سلول‌ها بر حسب طول ضلع هر سلول تعیین گردید. همان‌طور که مشاهده می‌شود بعد فرکتالی که برابر با شیب نمودار است  $1/0.4$  به دست آمده و ضریب تبیین نمودار نیز  $0/99$  محاسبه شده است. این ضریب بیانگر میزان همبستگی دو پارامتر در آینده است و به نوعی قدرت پیش‌بینی را نشان می‌دهد. با توجه به توان دوم این ضریب، مقدار آن همواره مثبت است درحالی‌که جذر این مقدار که برابر با ضریب همبستگی است، می‌تواند مثبت یا منفی باشد. از سوی دیگر ضریب تبیین هرچه به یک نزدیک‌تر باشد، اختلاف آن با ضریب همبستگی نیز کم‌تر است و هرچه به صفر نزدیک‌تر باشد، اختلاف آن با ضریب همبستگی بیش‌تر است. پس در این مورد ضریب تبیین و ضریب همبستگی با اختلافی از مرتبه  $0/0001$  تقریباً باهم برابر هستند.

جدول ۱- مقادیر به دست آمده مطابق با (رابطه ۲)

S	N	Log (S)	Log (N)
۲۵	۲۸۱۰۶۱	۱/۳۹۷۹۴	۵/۴۴۸۸۰۱
۵۰	۱۴۰۱۶۵	۱/۶۹۸۹۷	۵/۱۴۶۶۴
۱۰۰	۶۹۸۳۲	۲	۴/۸۴۴۰۵۴
۲۰۰	۳۴۵۵۷	۲/۳۰۱۰۳	۴/۵۳۸۵۳۶
۴۰۰	۱۶۹۶۸	۲/۶۰۲۰۶	۴/۲۲۹۶۳۱
۸۰۰	۸۰۳۷	۲/۹۰۳۰۹	۳/۹۰۵۰۹۴
۱۶۰۰	۳۵۳۳	۳/۲۰۴۱۲	۳/۵۴۸۱۴۴



شکل ۴: نمودار log-log تعداد سلول‌ها بر حسب طول ضلع هر سلول

(شکل ۴) نمودار شمارش جعبه‌ای و بعد فرکتالی D را برای محدوده مطالعاتی نشان می‌دهد. بعد فرکتالی به مقدار اقلیدسی ( $D=1$ ) نزدیک است. این بدان معنی است که بعد فرکتالی مشخصه الگوی پیچ‌وخم این رودخانه را نشان می‌دهد. به‌هرحال، با بررسی نتایج به دست آمده توسط دیگر محققان (مونتگومری<sup>۳۲</sup>، ۱۹۹۶؛ ولتری<sup>۳۳</sup>، ۱۹۹۶؛ فیلیپس<sup>۳۴</sup>، ۱۹۹۳؛ تانژو<sup>۳۵</sup>، ۱۹۹۲ و تورکت<sup>۳۶</sup>، ۱۹۹۲) مقدار D پیش‌بینی شده در این مقاله، می‌تواند به منشأ و تکامل رودخانه زیررود مربوط باشد. محققان نامبرده نشان دادند که مقادیر زیاد D برای سیستم‌های زهکشی واقع در نواحی کوهستانی به دست می‌آید و فرآیند فرسایشی قوی‌تر در آن چشم‌انداز را نشان می‌دهد، درحالی‌که شبکه‌های زهکش که در مناطق پست جریان دارند، ابعاد فرکتالی کم دارند و این درجه فرکتالی پایین، تکتونیک‌های غالب؛

32- Montgomery

33- Veltri

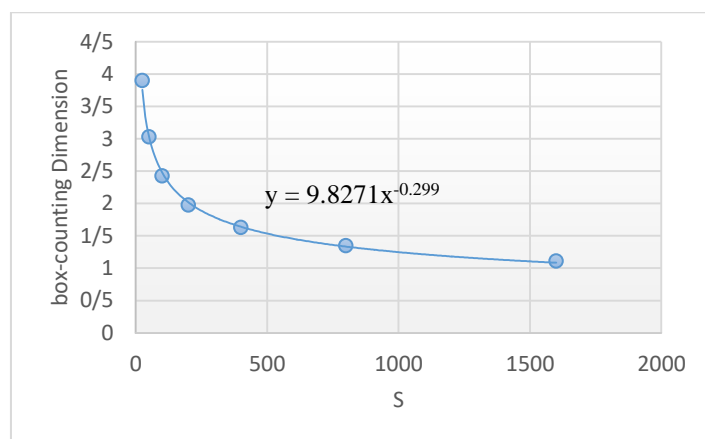
34- Phillips

35- Tanzhou

36- Turcotte

خواه فعال یا غیرفعال را نشان می‌دهد. بعلاوه، مقادیر  $D$  به کارکرد مقیاس مورد استفاده نیز وابسته است، که این مورد می‌تواند درجه تراکم شبکه زهکشی را تعیین می‌کند. در نتیجه، نواحی با تراکم زهکش بالا بعد فرکتالی بالا دارند که یک منشأ تکامل آشوبناک<sup>۳۷</sup> و غیرخطی را نشان می‌دهد، درحالی‌که  $D$  کم (بین ۱ و ۱/۱) مطابق با ولتری، (۱۹۹۶) و مونتگومری، (۱۹۹۶) می‌تواند وجود فرایندهای کنترلی تکتونیک روی تکامل الگوی زهکشی مورد مطالعه را نشان دهد. از سوی دیگر، مقدار صحیح بعد فرکتالی نشان‌دهنده فرایندهای اصلی (یعنی شکل مستقیم ناشی از تکتونیک‌ها) و بخش اعشاری نشان‌دهنده فرایندهای ثانویه (شکل بی‌نظم ناشی از فرسایش رودها) است. از آنجا که فعالیت‌های تکتونیک تمایل به وقوع آنی و عمل کردن طی دوره‌های زمانی طولانی‌تر نسبت به فرسایش (که اغلب به صورت فضایی متمرکز شده است) دارند، در صورتی که در حال حاضر غیرفعال باشند، یک بعد فرکتالی کم به احتمال زیاد با رویدادهای تکتونیک تحت شرایط متفاوت از حال حاضر ارتباط دارد. به طور عکس، بعد فرکتالی بالا احتمال فرایندهای فرسایشی را قوت می‌بخشد. همچنین مقادیر نزدیک به یک برای بعد فرکتالی حاکی از غلبه فعالیت‌های تکتونیک بر شکل‌گیری الگوی رودخانه دارد و این بعد هرچه به ۲ نزدیک‌تر شود، از تأثیر فعالیت‌های تکتونیک کاسته شده و نشان می‌دهد فعالیت‌های فرسایشی در تکامل الگوی رودخانه موثر هستند. بنابراین در مورد رودخانه زرينه رود با بعد فرکتالی ۱/۰۴ می‌توان گفت که الگوی آن متأثر از فعالیت‌های نئوتکتونیک می‌باشد.

در (شکل ۵) نمودار بعد شمارش جعبه‌ای که از (رابطه ۲) به دست می‌آید، بر حسب مقیاس‌های مختلف رسم شده است. نمودار حاکی از تغییرات غیرخطی این بعد بر حسب مقیاس است. همچنین مشاهده می‌شود که در محدوده خاصی از مقیاس، بعد به دست آمده مقداری بین ۱ و ۲ دارد که بنابر این دلایل می‌توان نتیجه گرفت رودخانه مذکور از نوع خود الحاقی است و از آنجا که در هر مقیاس، بعد متفاوتی به دست آمده، لذا می‌توان نتیجه گرفت که شکل رودخانه به طور یکسان در تمام جهات منتشر نشده است.



شکل ۵: ارتباط بین بعد شمارش جعبه‌ای و مقیاس

در حالت دوم، برای محاسبه بعد فرکتالی مطابق با روش تورکت، مقادیر محاسبه شده در (جدول ۲) لحاظ شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقدار بعد فرکتالی به حالت قبل بسیار نزدیک است. به نظر می‌رسد درجه فرکتالی ارتباط پذیری با عدد مرتبه رودخانه هورتون-استرالر در محدوده مرتبه سوم تا دهم دارد، که این بستگی به حضور شاخه‌های جانبی مختلف با درختان فرکتالی معین دارد و در واقع تعداد شاخه‌های جانبی نیز می‌تواند بعد فرکتالی را تعیین کند.

در واقع، در مدل‌های نظری که در آن‌ها کاربردهای روابط تجربی صدق می‌کند، هرگاه زاویه  $\theta$  یعنی زاویه بین شاخه‌های فرعی و شاخه‌های که دارای بالاترین مرتبه است، کم‌تر از  $60^\circ$  درجه باشد، بعد فرکتالی به ۱ تمایل دارد و برای زوایای بزرگ‌تر به ۲ تمایل پیدا می‌کند ( $D_C = 2$  برای  $\theta = 90^\circ$ ) که این مستقل از مرتبه آبراهه است.

اختلاف بین این مدل و شبکه رودخانه تحلیل شده می‌تواند به این حقیقت نسبت داده شود که سیمای کنونی شبکه زهکشی، شاخه‌های جانبی مراتب کم‌تر، مستقیماً به شاخه اصلی با بالاترین مرتبه ریخته می‌شوند (یعنی شاخه اول به شاخه مرتبه سوم یا چهارم می‌ریزد). علاوه بر این زاویه  $\theta$  ممکن است به‌طور قابل ملاحظه‌ای در حوضه رودخانه تغییر کند، که این به دلایل تکتونیکی و ساختار مورفولوژیکی است که این‌ها هر دو تکامل آن حوضه را تحت کنترل قرار می‌دهند.

جدول ۲- مقادیر به‌دست‌آمده مطابق با رابطه ۳

S	N	N2/N1	Log (N2/N1)	S1/S2	Log (S1/S2)	D
۲۵	۲۸۱۰۶۱	۰/۴۹۸۷	-۰/۳۰۲۱۶	۰/۵	-۰/۳۰۱۰۳	۱/۰۰۳۷۵۷
۵۰	۱۴۰۱۶۵	۰/۴۹۸۲۱۳	-۰/۳۰۲۵۹	۰/۵	-۰/۳۰۱۰۳	۱/۰۰۵۱۶۶
۱۰۰	۶۹۸۳۲	۰/۴۹۴۸۵۹	-۰/۳۰۵۵۲	۰/۵	-۰/۳۰۱۰۳	۱/۰۱۴۹۱
۲۰۰	۳۴۵۵۷	۰/۴۹۱۰۱۵	-۰/۳۰۸۹۱	۰/۵	-۰/۳۰۱۰۳	۱/۰۲۶۱۶۱
۴۰۰	۱۶۹۶۸	۰/۴۷۳۶۵۶	-۰/۳۲۴۵۴	۰/۵	-۰/۳۰۱۰۳	۱/۰۷۸۰۸۸
۸۰۰	۸۰۳۷	۰/۴۳۹۵۹۲	-۰/۳۵۶۹۵	۰/۵	-۰/۳۰۱۰۳	۱/۱۸۵۷۶۳
۱۰۰۰	۳۵۳۳					Ave: ۱/۰۵۲۳۰۸

حال مطابق با رابطه (۴) بعد ظرفیت را محاسبه می‌کنیم (جدول ۳). بعد ظرفیت یک مقدار صرفاً هندسی است و بیانگر تعداد حداقل سلول لازم برای پوشش شبکه رودخانه می‌باشد؛ یعنی با این فرض که مسیر رودخانه در راستای یک خط مستقیم باشد. در واقع تفاوت عمده این حالت با روش رودریگز و رینالدو در این است که بعد ظرفیت تعداد دفعاتی که دینامیک سیستم، نواحی مختلف فضای فاز ملاقات می‌کند در نظر نمی‌گیرد؛ به عبارت دیگر به

اندازه‌گیری جاذب<sup>۳۸</sup> در آن سیستم نمی‌پردازد. در حالی که در بعد محاسبه شده مطابق روش اول، تعداد دقیق سلول‌های پوشش داده شده لحاظ شده است.

جدول ۳- مقادیر به‌دست‌آمده مطابق با روش بعد ظرفیت

S	n	Log (n)	N	Log (N)	D <sub>c</sub>
۲۵	۷۲۳۸	۳/۸۶	۲۸۱۰۶۱	۵/۴۵	۱/۴۱
۵۰	۳۶۱۹	۳/۵۶	۱۴۰۱۶۵	۵/۱۵	۱/۴۷
۱۰۰	۱۸۱۰	۳/۲۶	۶۹۸۳۲	۴/۸۴	۱/۴۹
۲۰۰	۹۰۵	۲/۹۶	۳۴۵۵۷	۴/۵۴	۱/۵۳
۴۰۰	۴۵۳	۲/۶۶	۱۶۹۶۸	۴/۲۳	۱/۵۹
۸۰۰	۲۲۷	۲/۳۶	۸۰۳۷	۳/۹	۱/۶۶
۱۶۰۰	۱۱۴	۲/۰۶	۳۵۳۳	۳/۵۵	۱/۷۲
					Ave: ۱ / ۵۵

### نتیجه‌گیری

تحلیل فرکتالی یک ابزار ارزشمند است که شبکه‌های رودخانه‌ای را مستقل از اندازه آن‌ها، بررسی و مقایسه می‌کند و روشی را عرضه می‌کند که در آن سهم مقادیر کمی جهت تمایز در تحلیل اولیه‌ی روابط بین فرآیندهای هندسی و درجه‌ی بی‌نظمی شبکه‌های رودخانه‌ای را ارائه می‌دهد. مسیر رودخانه پدیده‌ای است که در ظاهر دارای هیچ نظم و قاعده‌ی خاصی نمی‌باشد؛ اما با استفاده از روابطی در قالب هندسه درختان فرکتالی می‌توان آن را منظم و بر اساس روال و منطق خاصی تعریف کرد. تفسیر بعد فرکتالی به‌عنوان یک کلید ژئومورفولوژیک، این امکان را می‌دهد تا فرآیندهای تکتونیک از مورفوتنیک تشخیص داده شوند، فرآیندهایی که همزمان ولی با شدت متفاوت عمل می‌کنند و البته در دوره‌های خاصی یکی بر دیگری غالب شده و توسعه کلی هندسه رودخانه در حوضه آبخیز را سبب می‌شود.

از نتایج کار انجام شده می‌توان نتیجه گرفت که از درجه فرکتالی، فرآیندهای اولیه و ثانویه و همچنین تشخیص رویدادهای تکتونیک از دینامیک‌های رودخانه‌ای، هم در پاسخ به مورفولوژی رودخانه و هم در تعیین این‌که کدام‌یک غالب است، به‌دست می‌آید. بعد فرکتالی پایین رودخانه زرینه‌رود (۱/۰۴)، فرآیندهای کنترلی تکتونیک روی تکامل الگوی زهکشی مورد مطالعه را نشان می‌دهد و حاکی از غلبه فعالیت‌های تکتونیک بر شکل‌گیری الگوی رودخانه دارد. همچنین مشاهده می‌شود که در محدوده خاصی از مقیاس، بعد به‌دست آمده مقداری بین ۱ و ۲ دارد که بنابراین دلایل می‌توان نتیجه گرفت رودخانه مذکور از نوع خود الحاقی هست و از آنجا که در هر مقیاس، بعد

متفاوتی به دست آمده، لذا می‌توان نتیجه گرفت که شکل رودخانه به‌طور یکسان در تمام جهات منتشر نشده است و در سیمای کنونی شبکه زهکشی، شاخه‌های جانبی مراتب کم‌تر، مستقیماً به شاخه اصلی با بالاترین مرتبه ریخته می‌شوند. همچنین تغییرات زاویه  $\theta$  در حوضه رودخانه به دلایل تکنیکی و ساختار مورفولوژیکی است که این‌ها هر دو تکامل آن حوضه را تحت کنترل قرار می‌دهند.

سپاسگزاری:

«این مقاله مستخرج از نتایج طرح تحقیقاتی اجرا شده با شماره قرارداد ۷۴ از محل اعتبارات ویژه پژوهشی دانشگاه علوم و فنون دریایی خرمشهر می‌باشد.»

## منابع

- حسن‌زاده، ی؛ اعلمی، م. ت؛ فرزین، س؛ شیخ‌الاسلامی، س. ر؛ حسن‌زاده، الف (۱۳۹۱)، «بررسی ماهیت آشوبناکی نوسانات روزانه تراز آب دریاچه ارومیه»، *نشریه مهندسی عمران و محیط‌زیست*، شماره ۴۲ (۱)، صص ۹-۱۷.
- رامشت، م. ح (۱۳۸۲)، «نظریه کیاس در ژئومورفولوژی»، *مجله جغرافیا و توسعه*، شماره ۱، صص ۱۳-۳۶.
- علمیزاده، ه؛ شایان، س (۱۳۹۳)، «نظریه آشوب در ژئومورفولوژی جریان‌ی (مطالعه موردی تغییرات بستر رود کل، هرمزگان)»، *جغرافیا و برنامه‌ریزی محیطی*، شماره ۵۵، صص ۲۱۷-۲۳۰.
- قاهری، ع؛ قربانی، م. ع؛ دلافروز، ه؛ ملکانی، ل (۱۳۹۱)، «ارزیابی جریان رودخانه با استفاده از نظریه آشوب»، *مجله پژوهش آب ایران*، شماره ۱۰، صص ۱۷۷-۱۸۶.
- کرم، الف (۱۳۸۹)، «نظریه آشوب، فرکتال (برخال) و سیستم‌های غیرخطی در ژئومورفولوژی»، *مجله جغرافیای طبیعی*، شماره ۸، صص ۸۲-۶۷.
- Andrieu, R., (1996), "The west coast of Britain: statistical self-similarity vs. characteristic scales in the landscape", *Earth Surface Processes and Landforms*, 21: 955-962.
- Angeles. G., Perillo, G., Pierini, J., (2004), "Fractal analysis of tidal channels in the Bahía Blanca Estuary (Argentina)", *Geomorphology*, 57 (3-4): 263-274.
- Baas, A. C. W., (2002), "Chaos, fractals and self-organization in coastal geomorphology: simulating dune landscapes in vegetated environments", *Geomorphology*, 48: 309-328.
- Burrough, P. A., (1981), "Fractal dimensions of landscape and other environment data", *Nature*, 294: 240-262.
- Claps, P., Fiorentino, M., Oliveto, G., (1996), "Informational entropy of fractal river networks", *Journal of Hydrology*, 187: 145-156.
- Donadio, C., Magdaleno, F., Mazzarella, A., Kondolf, G. M., (2014), "Fractal dimension of the hydrographic pattern of three large rivers in the Mediterranean morphoclimatic System: geomorphologic interpretation of Russian (USA), Ebro (Spain) and Volturno (Italy) Fluvial Geometry", *Pure and Applied Geophysics*, 172: 1975-1984.
- Fernández-Martínez, M., Sánchez-Granero, M. A., (2015), "How to calculate the Hausdorff dimension using fractal structures", *Applied Mathematics and Computation*, 264: 116-131.
- Gupta, V. K., Mesa, O. J., (2014), "Horton laws for hydraulic-geometric variables and their scaling exponents in self-similar Tokunaga river networks", *Nonlin, Processes Geophys*, 21: 1007-1025.
- Hack, J. T., (1957), "Studies of longitudinal profiles in Virginia and Maryland", U.S., *Geological Survey Professional Paper*, 294-B, 94 pp.
- Horton, R. E., (1945). "Erosional development of streams and their drainage basins: hydrographical approach to quantitative morphology". In: Christofolletti, A. (Ed.), *Geomorfology Fluvial*, O Canal Fluvial, vol. 1. Pub Blucher, Sao Paulo, Brazil.
- Klinkenberg, B., (1992), "Fractals and morphometric measures: is there a relationship", *Geomorphology*, 5: 5-20.
- Kusak, M., (2014), "Methods of fractal geometry used in the study of complex geomorphic networks", *AUC Geographica*, 49 (2): 99-110.

- Mandelbrot, B., (1967), "How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension", *Science*, 156: 636-638.
- Montgomery, K., (1996), "Sinuosity and fractal dimension of meandering rivers", *Area*, 28: 491-500.
- Nikora, V. I., (1991), "Fractal structures of river plan forms", *Water Resources Research*, 27: 1327-1333.
- Peckham, S. D., (1989), "New results for self-similar trees with applications to river networks", *Water Resour Res*, 31: 1010-33.
- Phillips, J. D., (1993), "Interpreting the fractal dimension of river networks". In: Lam, N.S., DeCola, L., (Eds.), *"Fractals in Geography"*, Prentice Hall: New York, pp. 142-157.
- Rinaldo, A., Rodriguez-Iturbe, I., Rigon, R., Ijjasz-Vasquez, E., Bras, R. L., (1993), "Self-organized fractal river networks", *Physical Review Letters*, 70: 822-825.
- Rodriguez, I., Rinaldo, A., (1997), *"Fractal River Basins: Chance and Self-Organization"*, Cambridge Univ. Press, Cambridge: Cambridge university.
- Sapozhnikov, V. B., Foufoula-Georgiou, E., (1999), "Horizontal and vertical self-organization of braided rivers toward a critical state", *Water Resources Research*, 35: 843 - 851.
- Tanzhou, L., (1992), *"Fractal structure and properties of stream networks"*, Water Resources Research, 28: 2981-2988.
- Turcotte, D. L., (1989), *"Fractals in geology and geophysics"*, *Pure and Applied Geophysics*, 131: 171-196.
- Turcotte, D. L., (1992), *"Fractals and chaos in geology and geophysics"*, Cambridge Univ, Press, Cambridge, 275 pp.
- Turcotte, D. L., (2007), "Fractal and chaos in geology and geophysics", *Cambridge University Press*, Cambridge, 398.
- Veltri, M., Veltri, P., Maiolo, M., (1996), "On the fractal description of natural channel networks", *Journal of Hydrology*, 187: 137-144.
- Xu, T., Moore, I. D., Gallant, J. C., (1993), "Fractals, fractal dimensions and landscapes-a review", *Geomorphology*, 8: 245-262.