دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهر
فصلنامه‌ی علمی فضای جغرافیایی

سال نوزدهم، شماره‌ی ۶۸
زمستان ۱۳۹۸، صفحات ۱۴۷-۱۳۳

مهرداد رمضانی‌پور[۱]

احتمال تداوم و تواتر یخبندان در شهرستان کرج براساس قوانین احتمالی

تاریخ دریافت: ۱۳۹٦/۱۱/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۱۰

چکیده

یخبندان‌های دیررس بهاره و زودرس پاییزه از دغدغه‌های امور زراعی محسوب می‌شود. کاهش ناگهانی دمای محیط نه تنها مانع از فرآیند شکوفه‌دهی، تلقیح و تولید میوه گیاه شده بلکه موجب عوامل بیماری‌زا و یخ بستن آب سلول گیاهان می‌شود. از سوی دیگر استمرار سرما و یخبندان می‌تواند تهدیدی برای زیرساخت‌های اقتصادی از جمله؛ حمل‌ونقل، سدها و نیز افزایش مصرف انرژی به حساب آید. در این راستا، تواتر و تداوم یخبندان‌های زودرس و دیررس شهرستان کرج براساس قوانین احتمالی، به صورت فرآیندهای تصادفی از طریق تجزیه‌وتحلیل متغیر میانگین دمای حداقل روزانه برای یک دورهٔ آماری ٢٤ ساله برگرفته از ایستگاه هواشناسی کرج و با استفاده از تکنیک زنجیرهٔ مارکوف مورد بررسی قرار گرفت. از آنجایی که مضرترین یخبندان‌ها مربوط به آغاز فصل انتقالی بوده و احتمال وقوعشان ببش‌تر است در ابتدا، ماتریس احتمال تغییر وضعیت دمای یخبندان و بدون یخبندان بر اساس روش بیشینهٔ درست‌نمایی محاسبه گردیده و سپس احتمال پایا و دورهٔ بازگشت روزانه هر یک از دو حالت یخبندان و بدون یخبندان برای تمامی ماه‌ها محاسبه شد. پس از تحلیل، نتایج نشان داد که بیش‌ترین احتمال وقوع روزهای یخبندان در ماه ژانویه بوده و برابر با ۰/۸۷ می‌باشد. سپس دورهٔ بازگشت تداومِ روزهای یخبندان ۲ و ۵ روزه برای ۱۲ ماه سال محاسبه گردید. پس از محاسبه، ماه آوریل با کوتاه‌ترین دورهٔ برگشت یعنی ۰/۰۳ روز برای یخبندان‌های ۲ روزه و ۰/۰۳ روز برای یخبندان‌های ۵ روزه و ماه‌های دسامبر و فوریه با طولانی‌ترین تداوم یخبندان یعنی ۰/۲٤ روز برای یخبندان ۲ روزه و به‌ترتیب ۰/۰۲ و ۰/۰۱ برای یخبندان ۵ روزه مشخص شد. همچنین احتمال رخداد روزهای یخبندان ماه‌های

۱- گروه اقلیم‌شناسی، گروه جغرافیا، واحد چالوس، دانشگاه آزاد اسلامی، چالوس، ایران. E- mail: mehr5490@iauc.ac.ir

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

مختلف سال با تکرارهای p (x=0) تا p (x=12) نشان داد که ماه‌های دسامبر، ژانویه، فوریه و مارس دارای حداکثر احتمال رخداد یخبندان در p (x=3) می‌باشند؛ به عبارت دیگر، احتمال سه بار یخبندان در ماه‌های مورد نظر بیش‌تر از رخداد یخبندان با تکرارهای دیگر است.

کلید واژه‌ها: تداوم و تواتر یخبندان، زنجیره مارکوف، دورهٔ بازگشت، یخبندان زودرس و دیررس.

مقدمه

در بیش‌تر موارد، بازده کم محصولات کشاورزی به دلیل عدم آگاهی و برنامه‌ریزی متناسب با شرایط جوی است. هرچند کنترل عوامل جوی توسط انسان ناممکن است ولی انسان درصدد کاهش میزان خسارت وارده با استفاده از روش‌های نوین است. به‌طور کلی یخبندان به شرایطی اطلاق می‌شود که دمای هوا در ارتفاع حدود ۱-۲ متری سطح زمین به صفر یا زیر صفر درجه سلسیوس برسد. یخبندان پدیده‌ای است تصادفی و به‌طور دقیق قابل پیش‌بینی نیست اما از مشاهده پیاپی آن آگاهی‌های مفیدی به‌دست می‌آید که با قوانین احتمال قابل بررسی است (Asakareh, 2009: 1-16). چنان‌که Waylen (1988) با تحلیل دمای روزانه در بخش مرکزی انگلستان مشخص نمود که بین طول مدت و زمان وقوع یخبندان رابطه معکوس معنی‌داری وجود دارد به‌طوری که کاهش یخبندان در حدود ۲ روز در هر دهه است. به سخنی دیگر منطقهٔ مذکور افزایش دما را در دهه‌های آتی تجربه خواهد کرد و Watkins (1991) نیز بر مبنای تحلیل رگرسیون یخبندان در یکی از مناطق مهم گندم‌خیز استرالیا اثبات کرد که عامل ارتفاع مهم‌ترین نقش را در بررسی و پیش‌بینی ویژگی‌های یخبندان دارد و سایر عوامل در درجهٔ بعدی قرار می‌گیرند. از طرفی دیگر Boer et al (1993) با بررسی پراکندگی مکانی یخبندان‌های دیررس بهاره و تأثیر آن بر تاکستان‌های ناحیهٔ شمالی فرانسه تعیین کرد که پدیدهٔ یخبندان اغلب هنگامی که آسمان صاف و سرعت باد کم است رخ می‌دهد و این شرایط، تابعِ عوامل موقعیت جغرافیایی، محیطی و توپوگرافی است (Madelin & Beltrando, 2005: 51). در ایران، جابه‌جایی محورهای فرود در سطح ۵۰۰ هکتوپاسکال و پرفشارهای مهاجر سطوح پایین جو همراه با پرفشارهای معمول سیبری در وقوع یخبندان‌های بهاره نقش مهمی دارند (Barati, 2008: 132). بررسی و پهنه‌بندی یخبندان‌های زود هنگام پاییزه، دیر هنگام بهاره و زمستانه استان خراسان رضوی مشخص کرد که وقوع یخبندان‌های پاییزه از شمال استان آغاز شده و سپس مناطق جنوبی را در بر می‌گیرد. همچنین یخبندان‌های بهاره در جنوب استان مذکور زودتر به پایان می‌رسد (Mianabadi et al., 2009: 70). مطالعهٔ تداوم روزهای یخبندان ایران با مدل زنجیرهٔ مارکوف[۲] نشان داد که وقوع یخبندان در ماه‌های اکتبر و مِی که به ترتیب به یخبندان‌های زودرس پاییزه و دیررس بهاره مشهور هستند از زنجیره مارکوف مرتبهٔ اول دوحالته تبعیت می‌کنند یعنی وقوع یخبندان فقط به شرایط اقلیمی روز گذشته مرتبط است. به عبارت دیگر، حاکمیت با یخبندان با تداوم‌های ۲ روزه است (Alijani et al., 2010: 1-20). اطلس اقلیم‌شناسی

2- Markov chain

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

ویژگی‌های آماری یخبندان‌های ایران که توسط (Mahmoudi et al., 2013: 55) تهیه گردیده نشان می‌دهد که آرایش مکانی ٦ پهنه یخبندان، تابعی از عرض جغرافیایی و ارتفاع است. پهنه A، جنوبی‌ترین پهنه ایران است که فاقد هرگونه یخبندان بوده و پهنه F که در شمال غربی ایران واقع شده زودرس‌ترین، دیررس‌ترین، طولانی‌ترین دوره یخبندان و کوتاه‌ترین طول فصل رشد را شامل می‌شود؛ بنابراین، آرایش ویژگی آماری یخبندان در ایران هم تابع عوامل زمین‌–اقلیم و هم تابع سیستم‌های سینوپتیکی وارد شده به کشور است. بررسی تغییرات الگوی فضایی یخبندان‌های دوره‌ای ایران مشخص می‌کند که به سمت دوره‌های اخیر (به‌ویژه از ۱۳۷۰ به بعد) وقوع یخبندان‌ها به شدت کاهش پیدا کرده است. به طوری که تحلیل تغییرات الگوی خود همبستگی فضایی یخبندان‌ها نشان داد که الگوی توزیع فضایی یخبندان‌ها طی سال‌های اخیر کاهش محسوسی داشته است که با نتایج مطالعات در زمینه گرمایش جهانی مطابقت دارد (Doustkamian et al., 2015: 39). با واکاوی الگوهای گردشی یخبندان‌های فراگیر در استان یزد محرز شد که استقرار تاوه قطبی در شمال دریاچه مازندران و شمال خاوری اروپا در الگوی اصلی تراز ۵۰۰ هکتوپاسکال مسبب ریزش هوای سرد با گردش واچرخندی از سمت شرقی منطقه بوده و منجر به وجود آمدن پدیده یخبندان شده است. همچنین نفوذ زبانه کم ارتفاع از سمت دریاچه مازندران با کانون شمال سیبری به درون ایران منجر به ریزش هوای سرد با گردش چرخندی از سمت باختری منطقه می‌شود (Hatami et al., 2015: 165). با شناسایی یخبندان‌های دیررس در باختر ایران تعیین شد که تاریخ آغاز یخبندان دیررس بین ۷ تا ۱۵ اسفند و در شمال باختری بین ۱ تا ۱۵ اردیبهشت است و شدت یخبندان‌های دیررس در جنوب باختری نسبت به شمال باختری بیش‌تر است (Shadman et al., 2017: 509). وقوع روزهای یخبندان و بدون یخبندان در ایستگاه‌های همدید همدان و ملایر با روش زنجیره مارکوف مرتبه اول مورد تحلیل قرار گرفت نتایج نشان داد که این مناطق، به ترتیب تعداد ۸٦۰ و ۱۱۹۹ دو روز بدون یخبندان متوالی و تعداد ۲۳۵ و ۲٤٦ روز بدون یخبندان بعد از وقوع یخبندان را به خود اختصاص داده‌اند. بر همین اساس، روزهای یخبندان بعد از روز بدون یخبندان در این ایستگاه‌ها به ترتیب ۲۳۵ و ۲٤٦ بودند. همچنین تعداد یخبندان‌های متوالی دو روزه در ایستگاه‌های مذکور به ترتیب ۱٤۰۰ و ۱۰۳۹ روز بود. درصد احتمال وقوع دوره یخبندان متوالی ایستگاه‌های همدان و ملایر به طور میانگین به ترتیب ۸۱/۰٦ و ۷٦/۷۳ بوده است و درصد احتمال وقوع روزهای یخبندان در این ایستگاه‌ها به طور میانگین ٦۰/۱۱ و ٤٦/۹۹ بوده است (Shahraki et al., 2019: 213).

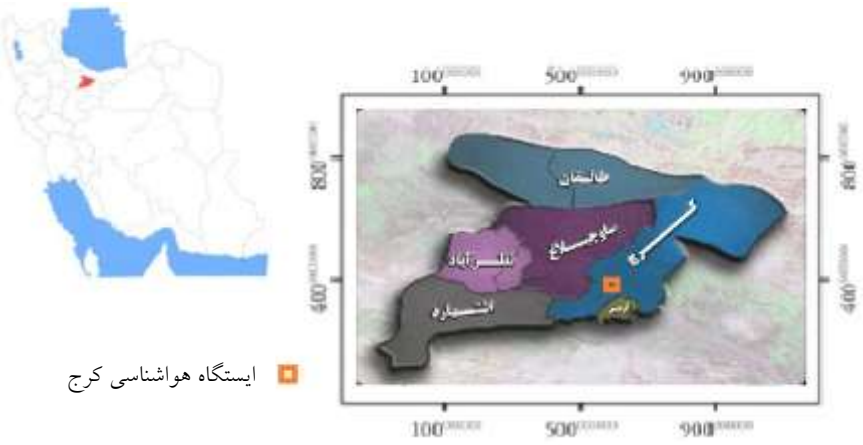
در این راستا شهرستان کرج نیز مصون از پدیده یخبندان نبوده و سرما و یخبندان‌های غیرمنتظره اغلب سبب خسارات شدید به باغات مرکبات و زمین‌های زراعی منطقه می‌شود و غالباً مقابله با سرما و یخبندان خارج از توان باغداران و کشاورزان است. همچنین اختلال در تردد محورهای مواصلاتی بر اثر لغزندگی و خطر آسیب‌پذیری تأسیسات زیر بنایی و اماکن مسکونی از دیگر معضلات این پدیده محسوب می‌شود. قبل از اندیشیدن تمهیداتی برای جبران بخشی از خسارات ناشی از پدیدهٔ بخبندان، لازم است در راستای حفظ آمادگی و افزایش ضریب ایمنی بخش‌های درگیر، مطالعات علمی و بررسی‌های کارشناسانه در خصوص احتمالات رخداد پدیدهٔ یخبندان در منطقه مورد مطالعه انجام پذیرد.

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

بنابراین هدف این پژوهش، بررسی و تعیین احتمال تداوم و تواتر یخبندان‌های دیررس بهاره و زودرس پاییزه در شهرستان کرج براساس قوانین احتمالی به‌صورت فرآیندهای تصادفی از طریق تکنیک زنجیرهٔ مارکوف و با استفاده از متغیر میانگین دمای حداقل روزانه و نیز شناسایی احتمال پایا و دورهٔ بازگشت روزانه هر یک از دو حالت یخبندان و بدون یخبندان و سپس تعیین دورهٔ بازگشت تداوم روزهای یخبندان ۲ و ۵ روزه می‌باشد.

محدوده مورد مطالعه

شهرستان کرج با وسعت ۱۶۲ کیلومتر مربع و ارتفاع متوسط ۱۳۲۰ متر نسبت به سطح دریاهای آزاد و با موقعیت جغرافیایی '۵۴ °۵۰ طول شرقی و '۳۵°۵۵ شمالی، از شمال به استان مازندران، از جنوب به شهرستان شهریار و استان مرکزی، از غرب به شهرستان ساوجبلاغ و قزوین و از شرق به استان تهران محدود است (شکل ۱). جلگه پهناور کرج از لحاظ اقلیمی تحت تأثیر ارتفاعات البرز و درهٔ چالوس و رودخانهٔ کرج قرار دارد که موجب خنک و مرطوب‌تر شدن این منطقه نسبت به تهران می‌گردد و این تمایز، تقریبا در تمام طول سال مشاهده می‌گردد. علت اختلاف دمای کرج نسبت به تهران به‌خصوص در شب‌ها به سبب نزدیکی کرج به ارتفاعات شمالی و سرد شدن شبانهٔ این دامنه‌ها و وزش باد کوه به دشت می‌باشد.



شکل ۱: موقعیت جغرافیایی شهرستان کرج

Figure 2: Geographical location of Karaj County

مواد و روش‌ها

در این تحقیق داده‌های دمای حداقل روزانهٔ ایستگاه کرج (۱۹۸۵– ۲۰۰۸ میلادی) از طریق تکنیک زنجیرهٔ مارکوف مورد بررسی قرار گرفت. انتخاب این مدل به دلیل توانمندی‌هایی آن در محاسبهٔ دوره‌های یخبندان و بدون یخبندان و همچنین ساده کردن راه حل بسیاری از مسائل مربوطه می‌باشد (Katz, ؛Stern, 1982: 420 ؛Dahale, et al, 1994: 27 1977: 671). زنجیرهٔ مارکوف یک روش ریاضی است که برای مدل‌سازی فرآیندهای تصادفی استفاده می‌شود. زنجیره در این مدل، گویای این واقعیت است که هر برآمد به رویداد قبل از خودش وابسته می‌باشد. در این پژوهش، فرآیند

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

تحلیل مارکوفی یخبندان‌های زودرس و دیررس منطقهٔ مورد مطالعه بدین صورت است که ابتدا روزهای یخبندان با دمای صفر و زیر صفر درجهٔ سلسیوس با حرف اختصاری F_2 و در ماتریس فراوانی با کد (۱) و دمای بالاتر از صفر درجهٔ سلسیوس با حرف اختصاری U_2 برای روزهای بدون یخبندان با کد (۰) مشخص می‌گردد. سپس داده‌های دمای روزانه بر حسب آستانهٔ صفر، مرتب گردیده و ماتریس فراوانی تغییر وضعیت، تشکیل می‌گردد رابطه (۱) (Alijani et al., 2010: 1-20).

رابطه (۱)

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & U \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ U \end{matrix} & \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

در مرحلهٔ بعد برای ارزیابی نیکویی برازش ماتریس فراوانی با فرایند دوحالته مارکوفی از آزمون استقلال استفاده می‌گردد و آمارهٔ آزمون از رابطه (۲) محاسبه می‌شود؛

رابطه (۲)

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

در این رابطه، χ_c^2 با χ^2 بحرانی و با درجهٔ آزادی $(c-1)(r-1)$ و خطای ۵% $\left(\chi^2_{0.05,df(c-1)(r-1)}\right)$ که در اینجا r و c به ترتیب تعداد سطر و ستون‌های ماتریس استاندارد است مقایسه می‌شود. اگر $\chi_0^2 > \chi_c^2$ باشد فرض صفر در سطح معنی‌داری مورد نظر رد می‌شود. این آزمون بر اساس جدول متقابل مقادیر انتقال مشاهده شده (n_{ij}) و تعداد انتقال مورد انتظار بر اساس فرض صفر (e_{ij}) بنا نهاده شده است. مقادیر مورد انتظار از روی مقادیر مشاهده شده انتقال با این فرض که جمع حاشیه‌ای مقادیر قابل انتظار همانند انتقالات مشاهده شده است به‌دست می‌آید یعنی؛

رابطه (۳)

$$e_{ij} = \frac{n_{i+}n_{+j}}{n}$$

در رابطهٔ (۳) $n_{i+} = n_{i1} + n_{i2}$ یعنی مجموع هریک از سطرهای ماتریس فراوانی و $n_{j+} = n_{j1} + n_{j2}$ یعنی مجموع هر یک از ستون‌های ماتریس فراوانی است و ماتریس احتمال تغییر وضعیت از طریق روش بیشینهٔ درست‌نمایی، عمل می‌کند و با رابطهٔ ٤ به‌دست می‌آید؛

رابطه (٤)

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & U \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ U \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_{1+}} & \frac{n_{12}}{n_{1+}} \\ \frac{n_{21}}{n_{2+}} & \frac{n_{22}}{n_{2+}} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

سپس احتمال پایا یا ایستایی ماتریس محاسبه می‌گردد و مشخص می‌کند که در مدت طولانی، احتمال وقوع مثلا روز یخبندان و روز بدون یخبندان چقدر است. بعد از آن، دوره بازگشت هر یک از تغییر وضعیت‌ها محاسبه می‌گردد که آن موسوم به عکس احتمال است و متوسط روزهایی است که بین وقوع دو حادثهٔ مشابه وجود دارد که به صورت رابطهٔ (۵) بیان می‌شود؛

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

رابطه (۵) $$T_j = \frac{1}{p_{ij}}$$

و در مرحلهٔ بعدی، دورهٔ برگشت یخبندان‌ها با تداوم m روزه برآورد می‌شود؛ یعنی یخبندان که در ۲ روز متوالی اتفاق افتاده و یا روزهای قبل و بعد از آن ۲ روز، رخ نداده است که بر اساس رابطهٔ (٦) به‌دست می‌آید؛

رابطه (٦) $$p_m = p^{m-1}$$

از توزیع پواسون برای تعیین احتمال رخداد یخبندان ۱ تا n روزه استفاده می‌شود. تابع پواسون به صورت رابطهٔ (۷) بیان می‌شود؛

رابطه (۷) $$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

و در ادامه، Wong & Lee (2005) بیان می‌کند که P (x)، یعنی میانگین تعداد پیشامدها و برابر با np و e عدد نپر و برابر با (۲/۷۱۸۲۸۲) و نیز متغیر x نشان‌دهندهٔ تعداد پیشامدهای یک رخداد درگذر زمان یا در برخی از گستره‌های جغرافیایی است. با افزایش مقدار λ، منحنی، حالت تقارن پیدا می‌کند. به‌طور کلی Asakareh (2011) معتقد است وقتی $n \geq ۲۰$ و $p \leq ۰/۰۵$ باشد، توزیع پواسون، تقریب خوبی از توزیع دوجمله‌ای به‌دست می‌دهد و وقتی‌که $n \geq ۱۰۰$ و $np \leq ۱۰$ باشد تقریب بسیار عالی برای آن به‌دست می‌دهد و Marques (2003) بیان می‌دارد که توزیع پواسون برای رخدادهای نادر یا با احتمال خیلی کم‌کاربرد دارد. مجموع احتمالات $x = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots \infty$ برابر با ۱ است؛ بنابراین احتمال کل برای x بزرگ‌تر یا مساوی با عدد مفروض k و برابر است با رابطهٔ (۸)؛

رابطه (۸) $$p(x >= k) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2) + \ldots + p(k-1)$$

یافته‌ها و بحث

با آغاز فصول سرد و گرم، دمای هوا به‌تدریج کاهش و افزایش پیدا می‌کند. اولین و آخرین تاریخی که دمای حداقل هوا به زیر صفر نزول می‌کند تاریخ اولین یخبندان پاییزی و آخرین یخبندان بهاره به‌حساب آورده می‌شود. این تاریخ از سالی به سال دیگر تغییر پیدا می‌کند و تعیین آن به‌طور مطلق تقریبا ممکن نیست اما با استفاده از آمار و احتمالات و با توجه به آمار بلندمدت می‌توان با احتمال‌های مختلف تاریخ اولین سرمای زودرس پاییزی و آخرین سرمای دیررس بهاره را تعیین کرد (Mohammadi & Gezelkhoo, 2010: 93). در این راستا با آزمون ماتریس فراوانی، معلوم شد که داده‌های دمای حداقل ایستگاه کرج از زنجیرهٔ مارکوف دو حالته پیروی می‌کند و نیز داده‌های مذکور فاقد روند بوده و بیانگر ایستایی زنجیره است. در واقع فراوانی‌ها با زمان، تغییر زیادی ندارند. ایستگاه کرج با فرض دو حالته بودن در ماتریس P و ماتریس احتمال تغییر حالت فراوانی f بدین صورت مرتب شده است که شرایط بدون توجه به خانهٔ آغازی و بعد از تقریباً ۵ وضعیت برای ژانویه با احتمال‌های ۰/۷٤ و ۰/۲۵ و ٦ وضعیت برای فوریه با احتمال‌های

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

۰/۵۹ و ۰/٤۲ و ۷ وضعیت برای مارس با احتمال‌های ۰/۲۵ و ۰/۷۵ و ۵ وضعیت برای آوریل با احتمال‌های ۰/۰۳۸ و ۰/۹٦ و ٦ وضعیت برای نوامبر با احتمال‌های ۰/۱۳ و ۰/۸۸ و ٦ وضعیت برای دسامبر برای احتمال‌های ۰/۵۳ و ۰/٤۸ به شرط حالت پایا می‌رسد. در واقع، بُردار سطری این ماتریس، گویای احتمال وقوع وضعیت بلندمدت یخبندان و بدون یخبندان است. بنابراین در آوریل، احتمال وقوع یخبندان بدون توجه به نقطه آغاز و مسیر آن برابر با ۰/۰٤ و در نوامبر برابر با ۰/۱۳ است.

- شدت و تداوم یخبندان‌ها

یکی از مشخصه‌های یخبندان، شدت آن است. شناخت شدت‌های مختلف یخبندان، امکان اتخاذ تدابیر مدیریتی مناسب را ممکن می‌سازد. بدیهی است بر حسب اهداف مطالعاتی، معیارهای مختلفی برای شدت یخبندان می‌توان تعریف نمود. یکی از معیارهای عام، طبقات سه‌گانه یخبندان‌ها است که بدین صورت تعریف شده است؛

الف) یخبندان ضعیف: دمای ۰ تا ۱/۵- درجه سلسیوس، ب) یخبندان ملایم: درجه حرارت‌های ۱/۵- تا ۳- درجه سلسیوس و ج) یخبندان شدید: درجه حرارت‌های کمتر از ۳ درجه سلسیوس (Alizadeh et al, 1993:38). در این تحقیق دمای صفر و زیر صفر به‌عنوان روز یخبندان و دمای بالای صفر به‌عنوان روز بدون یخبندان در نظر گرفته شده است. ماتریس فراوانی رخداد روزهای متوالی یخبندان و بدون یخبندان در (جدول ۱) نشان داده شده است.

جدول ۱- ماتریس فراوانی زنجیرهٔ مارکوف مرتبهٔ اول دوحالتهٔ روزهای یخبندان و بدون یخبندان

Table 1- Markov Chain Frequency Matrix of the First Order of Two-Dimensional Frost and Non- Frost Days

پاییز	فراوانی حالت‌ها	$F_D = \begin{matrix} & F & U \\ F & 294 & 93 \\ U & 82 & 274 \end{matrix}$	$F_N = \begin{matrix} & F & U \\ F & 590 & 43 \\ U & 43 & 43 \end{matrix}$	$F_O = \begin{matrix} & F & U \\ F & 741 & 1 \\ U & 1 & 0 \end{matrix}$
	احتمال تبدیل	$P_D = \begin{matrix} & F & U \\ F & 0.759 & 0.240 \\ U & 0.230 & 0.769 \end{matrix}$	$P_N = \begin{matrix} & F & U \\ F & 0.932 & 0.067 \\ U & 0.5 & 0.5 \end{matrix}$	$P_0 = \begin{matrix} & F & U \\ F & 0.998 & 0.001 \\ U & 1 & 0 \end{matrix}$
زمستان	فراوانی حالت‌ها	$F_D = \begin{matrix} & F & U \\ F & 481 & 93 \\ U & 78 & 106 \end{matrix}$	$F_F = \begin{matrix} & F & U \\ F & 190 & 92 \\ U & 92 & 297 \end{matrix}$	$F_J = \begin{matrix} & F & U \\ F & 130 & 68 \\ U & 69 & 476 \end{matrix}$
	احتمال تبدیل	$P_M = \begin{matrix} & F & U \\ F & 0.860 & 0.139 \\ U & 0.423 & 0.576 \end{matrix}$	$P_F = \begin{matrix} & F & U \\ F & 0.673 & 0.326 \\ U & 0.236 & 0.763 \end{matrix}$	$P_J = \begin{matrix} & F & U \\ F & 0.656 & 0.343 \\ U & 0.126 & 0.873 \end{matrix}$
بهار	فراوانی حالت‌ها	$F_J = \begin{matrix} & F & U \\ F & 719 & 0 \\ U & 0 & 0 \end{matrix}$	$F_M = \begin{matrix} & F & U \\ F & 739 & 2 \\ U & 2 & 0 \end{matrix}$	$F_A = \begin{matrix} & F & U \\ F & 684 & 15 \\ U & 15 & 5 \end{matrix}$
	احتمال تبدیل	$P_J = \begin{matrix} & F & U \\ F & 1 & 0 \\ U & 0 & 0 \end{matrix}$	$P_M = \begin{matrix} & F & U \\ F & 0.997 & 0.002 \\ U & 1 & 0 \end{matrix}$	$P_M = \begin{matrix} & F & U \\ F & 0.978 & 0.021 \\ U & 0.75 & 0.25 \end{matrix}$
تابستان	فراوانی حالت‌ها	$F_S = \begin{matrix} & F & U \\ F & 719 & 0 \\ U & 0 & 0 \end{matrix}$	$F_A = \begin{matrix} & F & U \\ F & 743 & 0 \\ U & 0 & 0 \end{matrix}$	$F_J = \begin{matrix} & F & U \\ F & 743 & 0 \\ U & 0 & 0 \end{matrix}$
	احتمال تبدیل	$P_S = \begin{matrix} & F & U \\ F & 1 & 0 \\ U & 0 & 0 \end{matrix}$	$P_A = \begin{matrix} & F & U \\ F & 1 & 0 \\ U & 0 & 0 \end{matrix}$	$P_J = \begin{matrix} & F & U \\ F & 1 & 0 \\ U & 0 & 0 \end{matrix}$

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

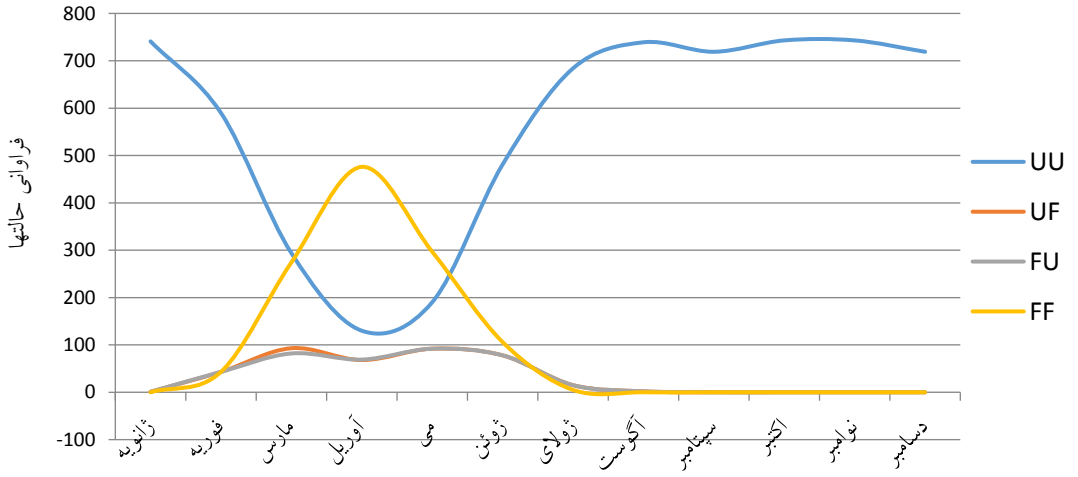
در فصل پاییز شهرستان کرج، وجود فراوانی حالت دو روز بدون بخبندان (U → U) نشان‌دهندهٔ کاهش یخبندان از ماه اکتبر تا ماه دسامبر است؛ به عبارت دیگر، فراوانی از ۷٤۱ روز در اکتبر به ۲۹٤ روز در دسامبر کاهش می‌یابد؛ اما با کاهش دو روز متوالی بدون بخبندان تا ماه دسامبر بر تعداد فراوانی روزهای متوالی یخبندان (F → F) افزوده می‌شود. به سخن دیگر، فراوانی از صفر به ۲۷٤ روز افزایش می‌یابد. با این حال، فراوانی حالت‌های دو روز متوالی یخبندان و بدون بخبندان بسیار نزدیک به هم هستند. این موضوع در مورد دو حالت دیگر هم صدق می‌کند به‌طوری که تغییر حالت از روز بدون یخبندان به روز یخبندان (U → F) از فراوانی ۱ در ماه اکتبر به فراوانی ۹۳ در ماه دسامبر می‌رسد و تغییر حالت از روز بدون یخبندان به یخبندان (F → U) از فراوانی ۱در ماه اکتبر به فراوانی ۸۲ در ماه دسامبر افزایش می‌یابد. در فصل زمستان این شهرستان، فراوانی روزهای متوالی یخبندان به بیش‌ترین حد خود می‌رسد (ماه ژانونه با ٤۷٦ فراوانی). به طوری که فراوانی روزهای متوالی بدون یخبندان (U → U) از ۱۳۰ در ماه ژانویه به ٤۸۱ روز در ماه دسامبر افزایش می‌یابد. بالعکس در ماه ژانویه (٤۷٦ فراوانی) نسبت به ماه دسامبر (۱۰٦ فراوانی) از فراوانی دو روز متوالی یخبندان (F → F) کاسته شده و بر تعداد روزهای متوالی بدون یخبندان (U → U) افزوده شده است؛ به عبارت دیگر، از ۱۳۰ فراوانی در ژانویه به ٤۸۱ فراوانی در دسامبر تغییر می‌یابد. در ماه‌های فصل زمستان شهرستان کرج، در فراوانی حالت (U → F) و(F → U) تغییرات چندانی رخ نداده است. در فصل بهار این شهرستان، روزهای بدون یخبندان، بیش‌ترین فراوانی در دورهٔ ۲٤ ساله را دربر می‌گیرد به‌طوری که فراوانی آن در ماه آوریل، مِی و ژوئن برابر با ٦۸٤، ۷۳۹ و ۷۱۹ است. باید گفت حالت (F → F)، (U → F) و (F → U) به ترتیب با فراوانی ۵، ۱۵ و ۱۵ در ماه آوریل مشاهده می‌شود و به غیر از حالت دو روز یخبندان، حالت یک روز یخبندان و بدون یخبندان و بالعکس آن با فراوانی ۲ و ۲ در ماه مِی اتفاق می‌افتد. در ماه آخر فصل بهار و تمام ماه‌های تابستان در منطقه تحقیق اثری از هیچ‌کدام از حالت‌های سه‌گانه یخبندان وجود نداشته و تمام روزها بدون یخبندان هستند؛ به عبارت دیگر در کل دوره، حالت(U → U) در ماه‌های ژوئن، ژولای، اگوست و سپتامبر غالب بوده است (جدول و شکل ۲).

جدول ۲- فراوانیِ حالت‌ها در زنجیرهٔ مارکوف مرتبهٔ اول دو حالته

Table 2- Frequency of states in the first order two-state Markov chain

حالت‌ها	ژانویه	فوریه	مارس	آوریل	می	ژوئن	ژولای	آگوست	سپتامبر	اکتبر	نوامبر	دسامبر
UU	۱۳۰	۱۹۰	٤۸۱	٦۸٤	۷۳۹	۷۱۹	۷٤۳	۷٤۳	۷۱۹	۷٤۱	۵۹۰	۲۹٤
UF	٦۸	۹۲	۷۸	۱۵	۲	۰	۰	۰	۰	۱	٤۳	۹۳
FU	٦۹	۹۲	۷۸	۱۵	۲	۰	۰	۰	۰	۱	٤۳	۸۲
FF	٤۷٦	۲۹۷	۱۰٦	۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	٤۳	۲۷٤

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]



شکل ۲: نمودار فراوانی حالت‌ها در زنجیرهٔ مارکوف مرتبهٔ اول دو حالته

Figure 2: Frequency diagram of states in the first two-state regular Markov chain

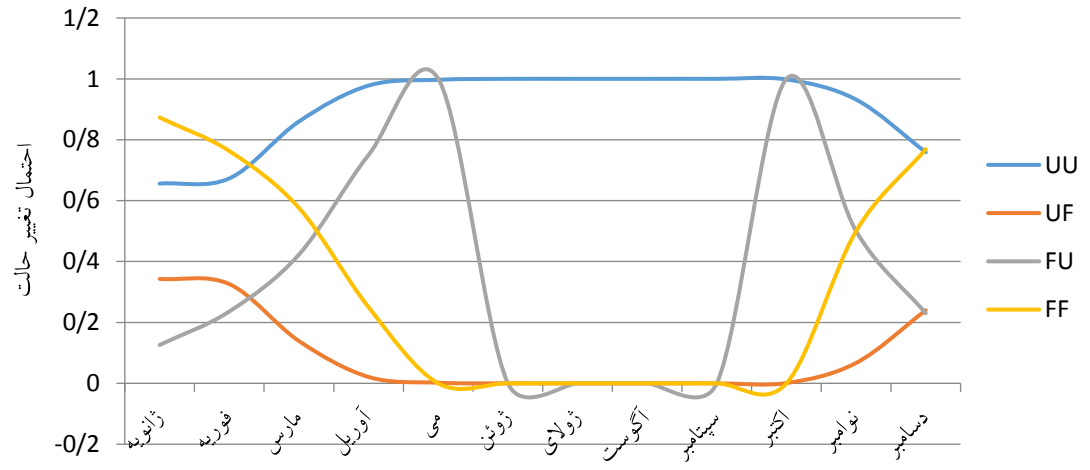
با توجه به تغییر وضعیت‌ها و بنا به تعریف احتمال، ماتریس احتمال تغییر حالت از طریق ماتریس فراوانی محاسبه شده و در پایین ماتریس فراوانی با نماد P نوشته شد. به‌عنوان مثال در این فرایند برای ماه اکتبر، مرحلهٔ انتقال یخبندان به یخبندان $(F \to F)$ برابر با $P_{F\to F} = 0$ است. در حالی که احتمال انتقال از حالت یخبندان به بدون یخبندان برابر با $P_{F\to U} = 1$ است. این موضوع در مورد ماه‌های نوامبر، دسامبر، ژانویه، فوریه، مارس، آوریل و مِی نیز صدق می‌کند؛ مثلا در ماه ژانویه، مرحلهٔ انتقال یخبندان به یخبندان $(F \to F)$ برابر با ۰/۸۷ و یخبندان به بدون یخبندان برابر با ۰/۱۳ به‌دست آمده است. همین مسئله در ماه نوامبر برای انتقال حالت‌ها از یخبندان به یخبندان و از یخبندان به بدون یخبندان برابر با ۰/۵ محاسبه شده است؛ بنابراین در ماه‌های انتقالی اکتبر، نوامبر و آوریل از احتمال انتقال حالت از یخبندان به یخبندان کاسته شده و به احتمال انتقال حالت از یخبندان به عدم یخبندان افزوده می‌شود. عکس این قضیه نیز در ماه‌های دسامبر، ژانویه و فوریه صادق است (جدول و شکل ۳).

جدول ۳- ماتریس احتمال تغییر حالت محاسبه شده از ماتریس فراوانی

Table 3: Matrix of Probability of State Change Calculated from Frequency Matrix

حالت‌ها	ژانویه	فوریه	مارس	آوریل	می	ژوئن	ژولای	آگوست	سپتامبر	اکتبر	نوامبر	دسامبر
UU	۰/٦٦	۰/٦٧	۰/٨٦	۰/٩٨	۰/٩٩	۱	۱	۱	۱	۰/٩٩	۰/٩٣	۰/٧٦
UF	۰/٣٤	۰/٣٣	۰/١٤	۰/۰٢	۰/۰۰٢	۰	۰	۰	۰	۰/۰۰١	۰/۰٧	۰/٢٤
FU	۰/١٣	۰/٢٤	۰/٤٢	۰/٧٥	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰/٥	۰/٢٣
FF	۰/٨٧	۰/٧٦	۰/٥٨	۰/٢٥	۰	۰	۰	۰	۰	.	۰/٥	۰/٧٧

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]



شکل ۳: نمودار ماتریس احتمال تغییر حالت محاسبه شده از ماتریس فراوانی

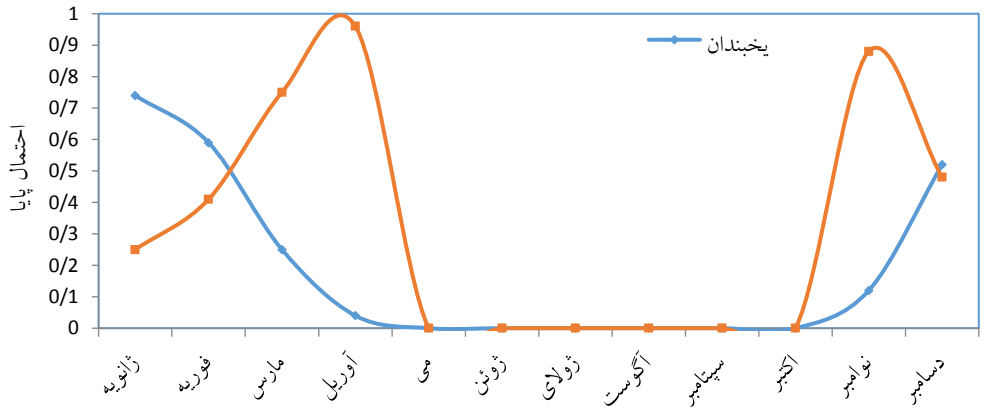
Figure 3: Matrix diagram of the probability of the state change calculated from the frequency matrix

در (جدول و شکل ٤) احتمال پایای یخبندان و عدم یخبندان برای ۱۲ ماه سال محاسبه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود احتمال پایای یخبندان به عدم یخبندان از ماه‌های انتقالی به سمت ماه‌های سرد به نفع یخبندان بوده و بر احتمال آن افزوده می‌شود؛ مثلا در ژانویه، احتمال یخبندان برابر با ۰/۷٤ و عدم یخبندان برابر با ۰/۲۵ است. در حالی که در ماه آوریل احتمال پایای عدم یخبندان برابر با ۰/۹٦ و وقوع یخبندان برابر با ۰/۰٤ به‌دست آمد.

جدول ٤- احتمال پایای یخبندان و بدون یخبندان

Table 4- Probability of frost and non-frost reliability

ماه	ژانویه	فوریه	مارس	آوریل	می	ژوئن	ژولای	آگوست	سپتامبر	اکتبر	نوامبر	دسامبر
یخبندان	۰/۷٤	۰/۵۹	۰/۲۵	۰/۰٤	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۱۲	۰/۵۲
عدم یخبندان	۰/۲۵	۰/٤۱	۰/۷۵	۰/۹٦	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۸۸	۰/٤۸



شکل ٤: نمودار احتمال پایای یخبندان و بدون یخبندان

Figure 4: Diagram of frost and non-frost probability

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

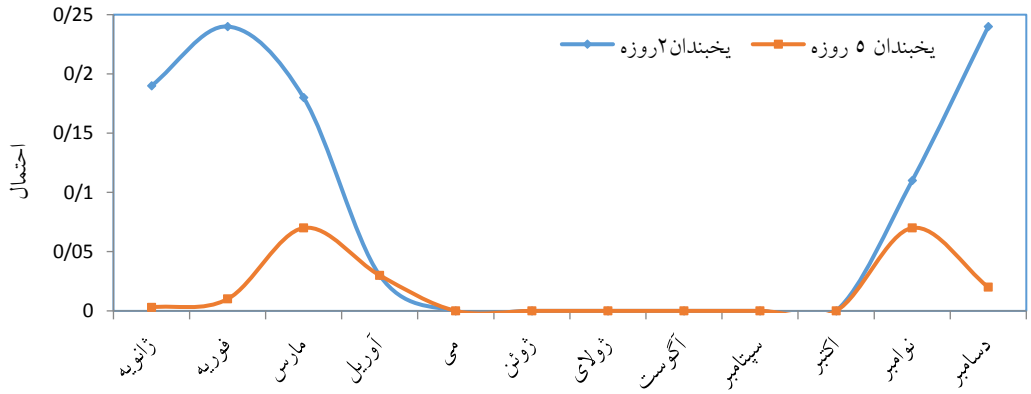
یکی از کاربردهای تکنیک زنجیرهٔ مارکوف برآورد دوره برگشت m روزه است. منظور از تداوم یخبندان یا عدم یخبندان، تعداد روزهای یخبندان‌ها یا عدم یخبندان‌های با تداوم متوالی است که یخبندان یا عدم یخبندان در آن رخ داده باشد. برای مثال، تداوم ۲ روزهٔ یخبندان یا عدم یخبندان به معنیِ یخبندان یا عدم یخبندان در دو روز متوالی است. ولی قبل از روز اول و بعد از روز دوم، یخبندان یا عدم یخبندان وجود نداشته باشد؛ اما بر اساس (جدول ۵) یخبندان‌های ۲ و ۵ روزه برای ماه فوریه با دورهٔ برگشت حدود ۰/۲٤ و ۰/۰۱ روز محاسبه شد. همچنین میزان احتمال برای ماه دسامبر برای یخبندان‌های ۲ و ۵ روزه برابر با ۰/۲٤ و ۰/۰۲ به‌دست آمد.

جدول ۵- دورهٔ برگشت یخبندان‌های ۲ و ۵ روزه

Table 5: 2 and 5 day frosts return period

ماه	ژانویه	فوریه	مارس	آوریل	می	ژوئن	ژولای	اگوست	سپتامبر	اکتبر	نوامبر	دسامبر
یخبندان ۲ روزه	۰/۱۹	۰/۲٤	۰/۱۸	۰/۰۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۱۱	۰/۲٤
یخبندان ۵ روزه	۰/۰۰۳	۰/۰۱	۰/۰۷	۰/۰۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۷	۰/۰۲

بررسی نقطه به نقطهٔ (شکل ۵) تأیید می‌کند که احتمال وقوع یخبندان‌های ۲ روزه نسبت به ۵ روزه در تمامی ماه‌های سال بیش‌تر است.



شکل ۵: نمودار احتمال دورهٔ برگشت یخبندان‌های ۲ و ۵ روزه

Figure 5: Diagram of the probability of a 2 and 5-day frosts return period

احتمال رخداد

(در جدول ٦) احتمال وقوع رخداد یخبندان در ماه‌های مختلف سال با تکرارهای $x = 0$ تا $x = 12$ محاسبه شده که در این جدول، $p\ (x = 0)$ در تمامی ماه‌ها به جزء ماه‌های آوریل و نوامبر احتمال بسیار پایینی را نشان می‌دهد. احتمال رخداد یخبندان با تکرارهای بیش‌تر مشخص می‌کند که وقوع حداقل یک‌بار یخبندان، بیش‌تر از عدم وقوع آن است.

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

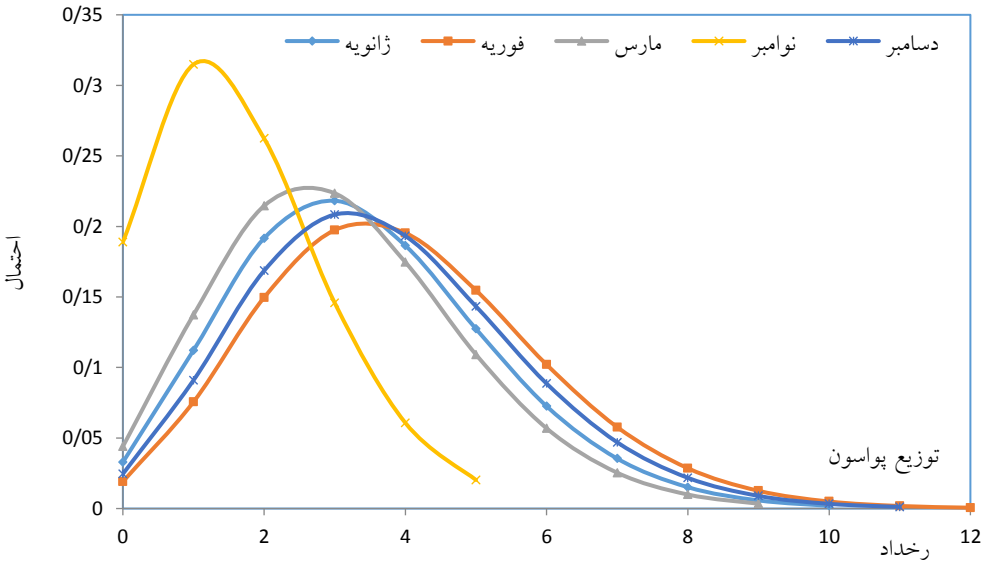
نمودار تابع چگالی احتمال پواسون برای ماه‌های دسامبر، ژانویه، فوریه و مارس نشان‌دهندهٔ حداکثر احتمال رخداد یخبندان در $p\,(x = 3)$ می‌باشد؛ یعنی احتمال سه بار یخبندان در ماه‌های مورد نظر بیش‌تر از رخداد یخبندان با تکرارهای دیگر است.

جدول ٦- احتمال رخداد یخبندان در ایستگاه کرج با استفاده از توزیع پواسون

Table 6: Probability of frost at Karaj station using Poisson distribution

ماه	احتمال فراوانی رخداد یخبندان از $P\,(x = 1)$ تا $P\,(x = 13)$ ایستگاه کرج												
	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	٦	٥	٤	۳	۲	۱	۰
ژانویه			۰/۰۰۲	۰/۰۰٦	۰/۰۲	۰/۰٤	۰/۰۷	۰/۱۳	۰/۱۹	۰/۲۲	۰/۱۹	۰/۱۱	۰/۰۰۳
فوریه	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰٥	۰/۰۱	۰/۰۳	۰/۰٦	۰/۱۱	۰/۱٦	۰/۱۹	۰/۱۹	۰/۱٥	۰/۰۸	۰/۰۲
مارس				۰/۰۰۳	۰/۰۱	۰/۰۳	۰/۰٦	۰/۱	۰/۱۷	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۱٤	۰/۰٤
نوامبر								۰/۰۲	۰/۰٦	۰/۱٥	۰/۲٦	۰/۳۲	۰/۱۹
دسامبر		۰/۰۰۱	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۰۲	۰/۰٥	۰/۰۹	۰/۱٤	۰/۱۹	۰/۲۱	۰/۱۷	۰/۰۹	۰/۰۳
آوریل											۰/۱۰	۰/۳۳	۰/٥٤

(شکل ٦) تغییرات احتمال رخداد یخبندان از $p\,(x = 0)$ تا $p\,(x = 12)$ را نشان می‌دهد. در ماه نوامبر احتمال یک‌بار یخبندان بیش‌تر از تکرارهای دیگر بوده و در آوریل، احتمال عدم وقوع یخبندان (۰/٥٤) نیز بسیار زیاد است. پر واضح است که نمودار ماهانهٔ توزیع پواسون برای ماه‌های دسامبر، ژانویه، فوریه و مارس، تمایل به تقارن داشته و چولگی کم‌تری دارد. با این حال تمامی توزیع‌ها راست چوله بوده و احتمالات با افزایش X در سمت دیگر میانگین، کاهش می‌یابند.



شکل ٦: نمودار توزیع احتمال پواسون برای ماه‌های رخداد یخبندان

Figure 6: Poisson probability distribution diagram for frost months

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج تحقیق مشخص شد که احتمال وقوع روزهای توام با یخبندان در شهرستان کرج از ماه‌های فصل سرد سال به سمت ماه‌های فصل گرم، کاهش قابل توجهی دارد. بیش‌ترین احتمال وقوع روزهای یخبندان با توالی ۲ روزه مربوط به ماه‌های سرد سال یعنی دسامبر، ژانویه، فوریه و مارس است. چنانچه Alijani et al (2010) علت یخبندان‌های زودرس پاییزه در ایران را عامل سرمایش شبانه می‌دانند و معتقدند عوامل سینوپتیکی دلیل رخداد یخبندان‌های دیررس بهاره است. محاسبه امید ریاضی دورهٔ برگشت بُردار احتمال پایایی نشان داد که کم‌ترین دورهٔ برگشت برای یک روز یخبندان مربوط به ماه ژانویه است. دورهٔ بازگشت روزهای توام با یخبندان برای تداوم ۲ و ۵ روز برای ۱۲ ماه از سال نشان داد که کوتاه‌ترین دورهٔ برگشت، مربوط به یخبندان‌های ماه ژانویه است. در ماه جون و سه ماه تابستان شهرستان کرج اثری از حالت‌های سه‌گانه یخبندان وجود نداشته و تمام روزها بدون یخبندان هستند. همچنین با به‌کارگیری تابع پواسون جهت بررسی احتمال رخداد یخبندان با فراوانی‌های مختلف، بین تابع پواسون و فراوانی رخداد ماه‌های دسامبر، ژانویه، فوریه و مارس هماهنگی وجود دارد.

محقق در راستای دستاورد این پژوهش، اذعان می‌دارد که با توجه با این‌که گندم و جو، گیلاس، زردآلو، هلو، آلو، سیب، آلبالو، تره‌بار و ... از جمله مهم‌ترین محصولات شهرستان کرج می‌باشند و در این منطقه مانند هر منطقه‌ای دیگری یخبندان‌های زودرس پاییزه بر محصولات باغی- زراعی تابستانه و یخبندان‌های بهاری بر شکوفه‌های بهاره تاثیرات مخربی دارد. لذا شرایط رشد گیاهان برای تولید شکوفه، تلقیح و تولید میوه بستگی به دمای مناسب و مداوم دارد و کاهش ناگهانی دما و تداوم آن موجب بروز انواع بیماری‌ها یا موجب یخ بستن آب در سلول‌های گیاهی می‌شود. با توجه به کاهش احتمال وقوع روزهای توام با یخبندان به سمت ماه‌های فصل گرم در منطقه مورد مطالعه می‌توان خوش‌بین بود که محصولات گیاهی بهاره نسبت به محصولات تابستانه کمتر در معرض خطر یخبندان باشند؛ بنابراین پیشنهاد می‌شود در راستای مدیریت بحران، برای یخبندان‌های زودرس پاییزه بیش از یخبندان‌های بهاره اقدامات پیش‌گیرانه جهت جلوگیری یا کاهش خسارات اتخاذ شود. علاوه بر این، پدیده یخبندان بر بسیاری از زیرساخت‌های اقتصادی نظیر سدها، جاده‌ها، سازه‌ها و بعضا مصرف انرژی اثرات منفی دارد به همین دلیل، آگاهی از فراوانی، تداوم و شدت یخبندان در مناطقی که پتانسیل رخداد پدیدهٔ یخبندان را دارند امری ضروری است.

تقدیر و تشکر

بدین‌وسیله از زحمات آقای دکتر محمود روشنی که در تدوین پژوهش حاضر همکاری صمیمانه داشته‌اند تشکر و قدردانی می‌شود.

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

References

- Alijani, B., Mahmoudi, P., Rigichahi, A., Khosravi P., (2010), "Investigating the continuation of frost days in iran using markov chain model", ***Natural geography research***, 73: 1-20. [In Persian].
- Alizadeh, A., Mousavi Bayegi, M., Kamali Gh, A., (1993), "Date of first frosts and last spring frosts in khorasan province", ***New Year magazine***, 24: 38-56. [In Persian].
- Asakareh, H., (2011), "***Principles of statistical climatology***", Published at Zanjan University, first edition, Zanjan. [In Persian].
- Asakareh, H., (2009), "Probability and continuity of early and late frosts in Zanjan", ***Journal of geography and environmental planning***, 37: 1-16. [In Persian].
- Barati, Gh., (2008), "Systematic relationships of immigrant high pressures and spring frosts in Iran", ***Journal of geographical research***, 54-55: 132-150. [In Persian].
- Boer, R., Campbell, L.C., Fletcher D.J., (1993), "Characteristics of frost in a major wheat–growing region of Australia", ***Australian journal of agricultural research***, 44 (8): 1731-1743.
- Dahale, S. D., Panchawagh, N., Singh, S. V., Ranatunge, E. R., Brikshavana, M., (1994), "Persistence in rainfall occurrence over tropical southeast asia and equatorial pacific", ***Theoretical and applied climatology***, 49: 27-39.
- Doustkamian, M., Ashrafi, S., Ghademi, F., (2015), "Investigating of spatial patterns changes of iran's periodic frosts", ***Journal of geographical research***, 30 (118): 39-50. [In Persian].
- Hatami, K., Biglu, B., Narangi Fred, M., (2015), "Investigation of circulating patterns of pervasive frosts in Yazd Province", ***Journal of geographic reasearches of desert areas***, 3(2): 165-188. [In Persian].
- Katz, R.W., (1977), "Precipitation as a chain – dependent process", ***Journal of applied meteorology***, 16: 671- 676.
- Madelin, M., Beltrando, G., (2005), "Spatial interpolation – based mapping of the spring frost hazard in the champagne vineyards", ***Meteorological applications***, 12: 51-56.
- Mahmoudi, P., Khosravi, M., Masoudian, S, A., Alijani, B., (2013), "Climatic atlas of statistical characteristics of iran's frosts", ***Journal of geographical research***, 4 (111): 55- 66. [In Persian].
- Marques de Sa, J. P., (2003), "Applied statistics using SPSS, Statistica and Matlab", ***Springer***, ISBN: 3-540-01156-0.
- Mianabadi, A., Mousavi Bayegi, M., Sanaeinejad, H., Nezami, A., (2009), "Investigation and zoning of early fall, late spring and winter frosts using GIS in Razavi province", ***Journal of water and soil (agricultural science and technology)***, 23 (1): 70-90. [In Persian].
- Mohammadi, H., Gezelkhoo, M., (2010), "Influence of early autumn and late spring frosts on grain cultivation in Karaj", ***Journal of land geography***, 37: 93-109. [In Persian].
- Shadman, h., Jalali, M., Lotfi, F., (2017), "Proposal of a possible statistical method for identifying late frosts (case study: late frosts in western Iran)", ***Journal of environmental science studies***, 2 (3): 509-518. [In Persian].
- Shahraki, N., Maroufi, S., (2019), "Analysis of the occurrence of normal and frosts days using the markov chain first-order method (case study: Hamadan and Malayer synoptic stations)", ***Journal of soil and water science***, 29 (2): 212-213. [In Persian].
- Stern, R. D., (1982), "Computing a probability distribution for the start of the rains from a markov chain model for precipitation", ***Journal of applied meteorology***, 21: 420-423.
- Watkins. C., (1991), "The Annual period of freezing temperatures in central England: 1850-1989", ***International journal of climatology***, 11 (8): 889-896.

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]

- Waylen. P. R., (1988), "Statistical analysis of freezing temperatures in central and southern Florida", ***Journal of climatology***, 8: 62-607.
- Wong, W. S. D., Lee. J., (2005), "Statistical analysis of geographic information with ArcView GIS and ArcGIS", ***John Wiley & Sons, INC***, 13: 468-477.

[Downloaded from geographical-space.iau-ahar.ac.ir on 2026-10-31]